一道高三函数模考题的命制历程

卫福山[1]　　申艳芳[2]

(1.上海市松江二中;2.上海音乐学院附属黄浦比乐中学)

摘　要:介绍了一道高三函数模考题的命制过程,主要从源题分析入手,经历确定主题、虚构定义、设计问题、新题成型、延伸思考等环节,体会到命制一道题而得到一类题的目的,为一线教师命制试题提供参考.

关键词:函数模考题;题源;命制过程;延伸思考;改编

近期要进行高三数学模拟测试,需要命制一道函数类试题,作为试卷的最后一题,于是笔者寻找了两道函数类试题,想通过改编来命制一道新题.

题1　给出以下定义:设 m 为给定的实常数,若函数 $y=f(x)$ 在其定义域内存在实数 x_0,使得 $f(x_0+m)=f(x_0)+f(m)$ 成立,则称函数 $f(x)$ 为"$G(m)$ 函数".

(1) 判断函数 $f(x)=3^x$ 是否为"$G(2)$ 函数";

(2) 若函数 $f(x)=\lg\dfrac{a}{x^2+1}$ 为"$G(1)$ 函数",求实数 a 的取值范围;

(3) 已知 $f(x)=x+b(b\in\mathbf{R})$ 为"$G(0)$ 函数",设 $g(x)=x\,|\,x-4\,|$.若对任意的 $x_1,x_2\in[0,t]$,当 $x_1\neq x_2$ 时,都有 $\dfrac{g(x_1)-g(x_2)}{f(x_1)-f(x_2)}>2$ 成立,求实数 t 的最大值.

题2　对于函数 $y=f(x)$ 的导函数 $y'=f'(x)$,若在其定义域内存在实数 x_0 和 t,使得 $f(x_0+t)=(t+1)\cdot f'(x_0)$ 成立,则称 $y=f(x)$ 是"跃点"函数,并称 x_0 是函数 $y=f(x)$ 的"t 跃点".

(1) 若函数 $y=\sin x-m(x\in\mathbf{R})$ 是"$\dfrac{\pi}{2}$ 跃点"函数,求实数 m 的取值范围;

(2) 若函数 $y=x^2-ax+1$ 是定义在 $(-1,3)$ 上的"1跃点"函数,且在定义域内存在两个不同的"1跃点",求实数 a 的取值范围;

(3) 若函数 $y=\mathrm{e}^x+bx(x\in\mathbf{R})$ 是"1跃点"函数,且在定义域内恰存在一个"1跃点",求实数 b 的取值范围.

一、题源分析

两道试题都是在方程有解的条件下虚构了函数中的一种新定义问题,并在此基础上逐步考查函数的各种性质,但主要围绕着方程有解问题展开(形式上较单一).

题1是一道纯函数问题,从具体函数的判断,到含参函数符合定义后求参数范围,再到借用此类特殊定义的函数来研究较复杂含参函数的单调性求参数范围(最值),涉及的函数类型较多,包括指数函数、对数函数(含参、复合)、绝对值函数等.

题2是一道函数与导数综合问题,三个小题都是在新定义条件下求参数的取值范围(略显单调),只是在定义的条件上作改变,从具体的"$\dfrac{\pi}{2}$ 跃点",到存在两个不同的"1跃点",再到恰存在一个"1跃点",虽然"跃点"不同,但随着函数复杂程度的改变,解决的难度也在变化.本题涉及的函数类型有:三角函数(含参)、二次函数(含参)、指数函数与一次函数复合(含参).本题导数的使用主要是求基本函数的导数,只是在第(3)小题涉及到利用导数研究函数的性质(单调性).

二、命题过程

在以上源题及其分析的基础上,结合学情分析,经过一系列过程改编一道新题,命题过程介绍如下.

1. 确定主题

结合学情分析及以上题1、题2,确定考查主题是函数与导数,但考虑到上海高考对导数的要求不宜太高,在具体问题的设计中,主要考查导数的基本知识、基本方法和基本技能.

2. 虚构定义

注意到题1、题2均是以方程有解为基础(1个参数、1个变量),略显单调,改编成以不等式恒成立及有解为基础(1个参数有解、1个变量恒成立),当然,以不等式的形式呈现,势必增加了试题的灵活性与解题技巧,但可以通过具体函数的设置而降低难度,以便满足评价要求.

改编后的定义如下：

函数 $y=f(x)$ 的导函数记为 $f'(x)$，若对函数 $y=f(x)$ 定义域 D 内任意实数 x，存在实数 t，使得不等式 $f(x+t)\geqslant(t+1)\cdot f'(x)$ 成立，则称函数 $y=f(x)$ 为 D 上的“$M(t)$ 函数”.

3. 设计问题

结合题1、题2中问题的设置分析(函数类型、考查问题)，改编时重点考虑如下几点：(1) 函数类型尽量丰富一些；(2) 设计的问题注意角度的改变；(3) 难度上不断提升但要注意符合评价要求.

在此基础上，设计了如下几个问题：

(1) 判断函数 $y=\sin x$ 是否是 $[0,\pi]$ 上的“$M(\frac{\pi}{2})$ 函数”，请说明理由；

(2) 若函数 $y=e^x+mx$ 是 $(1,+\infty)$ 上的“$M(1)$ 函数”，求实数 m 的取值范围；

(3) 已知函数 $g(x)=x^2-ax$ 是 $[0,2]$ 上的“$M(2)$ 函数”. 若对任意的 $x_1,x_2\in[0,s]$，当 $x_1\neq x_2$ 时，都有 $\frac{g(x_1)-g(x_2)}{x_1-x_2}<2$ 成立，求实数 s 的最大值.

【问题分析】① 改编题涉及的函数有三角函数、指数函数与一次函数复合(含参)、二次函数(含参)；

② 设问方式有：具体函数的判断(说明理由)、符合定义的函数求参数范围、综合性质考查；

③ 导数的考查：求基本函数的导数、利用导数判断函数单调性及求最值；

④ 理解的深度考查：$\frac{\pi}{2}\cos x\leqslant 0$ 对任意的 $x\in[0,\pi]$ 不是都成立，$a(x-1)\leqslant(x-1)^2+3$ 对任意的 $x\in[0,2]$ 成立需分类讨论后求交集，$2x\leqslant a+2$ 对任意的 $x\in[0,s]$ 及 $a\in[-4,4]$ 恒成立；

⑤ 评价梯度的设计：问题的设计考虑到了评价梯度，比如，第(1)小题在“$\frac{\pi}{2}\cos x\leqslant 0$ 对任意的 $x\in[0,\pi]$ 不是都成立”的说明上，第(2)小题在“即 $m\geqslant\frac{(2-e)e^x}{x-1}$ 对任意 $x\in(1,+\infty)$ 的成立”的解决中，第(3)小题在“$a(x-1)\leqslant(x-1)^2+3$ 对任意的 $x\in[0,2]$ 成立”及“存在 $a\in[-4,4]$，使得不等式 $2x\leqslant a+2$ 对任意的 $x\in[0,s]$ 恒成立”的解决中，特别是第(3)小题存在与任意的理解具有一定难度.

4. 新题成型

新题 函数 $y=f(x)$ 的导函数记为 $f'(x)$，若对函数 $y=f(x)$ 定义域 D 内任意实数 x，存在实数 t，使得不等式 $f(x+t)\geqslant(t+1)\cdot f'(x)$ 成立，则称函数 $y=f(x)$ 为 D 上的“$M(t)$ 函数”.

(1) 判断函数 $y=\sin x$ 是否是 $[0,\pi]$ 上的“$M(\frac{\pi}{2})$ 函数”，请说明理由；

(2) 若函数 $y=e^x+mx$ 是 $(1,+\infty)$ 上的“$M(1)$ 函数”，求实数 m 的取值范围；

(3) 已知函数 $g(x)=x^2-ax$ 是 $[0,2]$ 上的“$M(2)$ 函数”. 若对任意的 $x_1,x_2\in[0,s]$，当 $x_1\neq x_2$ 时，都有 $\frac{g(x_1)-g(x_2)}{x_1-x_2}<2$ 成立，求实数 s 的最大值.

简解 (1) 由于 $\sin(x+\frac{\pi}{2})\geqslant(\frac{\pi}{2}+1)\cos x$，即 $\frac{\pi}{2}\cos x\leqslant 0$ 对任意的 $x\in[0,\pi]$ 不是都成立，故 $y=\sin x$ 不是 $[0,\pi]$ 上的“$M(\frac{\pi}{2})$ 函数”.

(2) 由条件知，$e^{x+1}+m(x+1)\geqslant 2(e^x+m)$ 对任意的 $x\in(1,+\infty)$ 成立，即 $m\geqslant\frac{(2-e)e^x}{x-1}$ 对任意的 $x\in(1,+\infty)$ 成立. 令 $h(x)=\frac{(2-e)e^x}{x-1}$，则

$$h'(x)=\frac{(2-e)[e^x(x-1)-e^x]}{(x-1)^2}=\frac{(2-e)e^x(x-2)}{(x-1)^2},$$

当 $x\in(1,2)$ 时，$h'(x)>0$；当 $x\in(2,+\infty)$ 时，$h'(x)<0$；所以 $h(x)$ 在 $(1,2)$ 上是增函数，在 $(2,+\infty)$ 上是减函数，故

$$m\geqslant[h(x)]_{\max}=h(2)=(2-e)e^2.$$

(3) 由条件知，$(x+2)^2-a(x+2)\geqslant 3(2x-a)$ 对任意的 $x\in[0,2]$ 成立，即 $a(x-1)\leqslant(x-1)^2+3$ 对任意的 $x\in[0,2]$ 成立，分 $0\leqslant x<1$，$x=1$，$1<x\leqslant 2$ 讨论，并结合耐克函数的图像可得 $-4\leqslant a\leqslant 4$. 对任意的 $x_1,x_2\in[0,s]$，$x_1\neq x_2$，不妨设 $x_1<x_2$，则不等式变形为 $g(x_1)-2x_1>g(x_2)-2x_2$. 构造函数 $p(x)=x^2-(a+2)x$，即 $p(x)$ 在 $[0,s]$ 上是减函数，于是 $p'(x)\leqslant 0$，即存在 $a\in[-4,4]$，使得不等式 $2x\leqslant a+2$ 对任意的 $x\in[0,s]$ 恒成立，于是 $2s\leqslant 6$，故 $s\leqslant 3$，所以 s 的最大值是 3.

三、延伸思考

考虑到以上新题的定义方式，对任意的 $x\in D$，存在实数 t 使得不等式 $f(x+t)\geqslant(t+1)\cdot f'(x)$ 成立，因此是不等式恒成立及有解问题的综合，以上改编题均是对具体的 t，使得不等式恒成立，也可以设计成不等式恒成立的条件下，关于 t 的不等式有解，求 t 的取值范围，如：若函数 $y=e^x$ 是 $(1,+\infty)$ 上的

"$M(t)$ 函数",求实数 t 的取值范围.

此外,第(3)小题的函数 $g(x)=x^2-ax$ 也较为简单,可以稍加改变以增加本小题的难度,比如以下几种改编.

改编方向1:将函数稍作修改,增加对数.

改编1　已知函数 $g(x)=x^2-ax$ 是$[0,2]$上的"$M(2)$ 函数".若对任意的 $x_1,x_2\in(0,s]$,当 $x_1\neq x_2$ 时,都有 $\dfrac{g(x_1)-g(x_2)}{\ln x_1-\ln x_2}<6$ 成立,求实数 s 的取值范围.

说明　修改后必须要构造函数,利用导数才能求解.

简解　$a\in[-4,4]$,不妨设 $x_1<x_2$,则有 $g(x_1)-g(x_2)>6(\ln x_1-\ln x_2)$,即 $g(x_1)-6\ln x_1>g(x_2)-6\ln x_2$,令 $h(x)=g(x)-6\ln x=x^2-ax-6\ln x$,则存在 $a\in[-4,4]$,使得 $h(x)$ 在$(0,s]$上是减函数,于是 $h'(x)\leqslant 0$,即存在 $a\in[-4,4]$,使得 $2x-\dfrac{6}{x}\leqslant a$ 对任意 $x\in(0,s]$ 成立,于是 $2s-\dfrac{6}{s}\leqslant 4$,解得 $-1\leqslant s\leqslant 3$.注意到 $s>0$,所以实数 s 的取值范围是$(0,3]$.

改编方向2:将函数稍作修改,不等式中引入字母,区间中略去字母.

改编2　已知函数 $g(x)=x^2-ax$ 是$[0,2]$上的"$M(2)$ 函数".若对任意的 $x_1,x_2\in[1,2]$,当 $x_1\neq x_2$ 时,都有 $\dfrac{g(x_1)-g(x_2)}{\ln x_1-\ln x_2}>p$ 成立,求实数 p 的最大值.

简解　$a\in[-4,4]$,不妨设 $x_1<x_2$,则有 $g(x_1)-g(x_2)<p(\ln x_1-\ln x_2)$,即 $g(x_1)-p\ln x_1<g(x_2)-p\ln x_2$,令 $h(x)=g(x)-p\ln x=x^2-ax-p\ln x$,则存在 $a\in[-4,4]$,使得 $h(x)$ 在$[1,2]$上是增函数,于是 $h'(x)\geqslant 0$,即存在 $a\in[-4,4]$,使得 $2x-\dfrac{p}{x}\geqslant a$ 对任意 $x\in[1,2]$ 成立,于是 $2x-\dfrac{p}{x}\geqslant -4$ 对任意 $x\in[1,2]$ 成立,即 $p\leqslant 2x^2+4x$ 对任意 $x\in[1,2]$ 成立,于是 $p\leqslant 6$,即实数 p 的最大值为6.

改编方向3:涉及函数及导数抽象性质的推理论证,考查逻辑推理能力.

改编3　设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,且在 $\mathbf{R}$ 上可导,其导函数为 $y=f'(x)$.若区间 I 及实数 t 满足:不等式 $f(x+t)\geqslant(t+1)f'(x)$ 对任意 $x\in I$ 成立,则称函数 $y=f(x)$ 为 I 上的"$M(t)$ 函数".

设函数 $y=f(x)$ 有最大值,证明:"对任意 $x\in\mathbf{R}$,$f'(x)\leqslant 0$ 与 $f(x)\geqslant 0$ 恒成立"是"对任意正整数 n,$y=f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的 $M(n)$ 函数"的充要条件.

简证　充分性:若对任意 $x\in\mathbf{R}$,均有 $f'(x)\leqslant 0$ 且 $f(x)\geqslant 0$,则对任意正整数 n,有

$f(x+n)\geqslant 0\geqslant(n+1)f'(x)(\forall x\in\mathbf{R})$,

即 $y=f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的 $M(n)$ 函数.

必要性:若对任意正整数 n,$y=f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的 $M(n)$ 函数,即

$$f(x+n)\geqslant(n+1)f'(x)(\forall x\in\mathbf{R}).\quad(*)$$

记函数 $y=f(x)$ 的最大值为 K.

先证明 $f'(x)\leqslant 0$ 恒成立.用反证法,若存在 $x_1\in\mathbf{R}$ 使得 $f'(x_1)>0$,则取正整数 n,使得 $(n+1)f'(x_1)>K$,则 $(n+1)f'(x_1)>K\geqslant f(x_1+n)$,与(*)矛盾.所以 $f'(x)\leqslant 0$ 恒成立,这意味着 $y=f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的单调减函数.

再证明 $f(x)\geqslant 0$ 恒成立.取 x_0 为 $y=f(x)$ 的一个最大值点,则当 $x\leqslant x_0$ 时,由单调性知 $f(x)\geqslant f(x_0)=K$,但 $f(x)\leqslant K$,所以 $f(x)=K(\forall x\leqslant x_0)$,于是 $f'(x)=0(\forall x<x_0)$.

对任意 $x_2\in\mathbf{R}$,可取一个与 x_2 有关的正整数 n,使得 $x_2-n<x_0$,由(*)知

$f(x_2)\geqslant(n+1)f'(x_2-n)=0$.

必要性得证.

四、结语

命制试题需要不断探索与研究,在日常教学中,将试题的研究过程贯穿其中,必将提升学生的解题能力,提高课堂教学效率.

(收稿日期:2024-10-07)

(上接第34页)

因此 $\triangle ABC$ 的面积的最大值为 $\dfrac{\sqrt{5}}{10}$,此时 $\cos C=\dfrac{2}{3}$.

点评　引入加权的外森比克不等式,揭开了题1的命题背景,提高了对该类问题的认识高度.

参考文献:

[1] 波利亚.怎样解题:数学思维的新方法[M].上海:上海科技教育出版社,2018.

(收稿日期:2024-10-06)