

境脉式结构化数学教学的实践与理论建设

——以“反比例函数图象与性质”第3课时为例

贾保柱 (江苏省昆山市姜江实验中学 215300)



作者简介 贾保柱,1970年出生,正高级教师,江苏省中学数学特级教师,发表教育教学论文63篇,主持研究大市级以上课题14项,其中省级5项,形成了以“初中数学能力体系课程建设与教学”为主线的初中数学教育研究系统,主张数学课堂加强“五个重视”教学,即重视活动、重视合作、重视思维、重视感悟、重视质疑,并对每一个“重视”都有教学研究成果发表,其中两篇被人大复印资料全文转载。

摘要 探索将境脉式结构化数学教学应用于新授课,尝试建立境脉式结构化数学教学的基本模型和理论框架。学生类比原结构,自主形成新知的探究结构,获得“四能”。多元化数学理论的渗透实践和课标理念的结构化实施,促进了学生的数学精神、数学品格的发展,使深度教学更能提振精神和浸润心灵。

关键词 境脉式教学;结构化教学;反比例函数

文章编号 1004-1176(2025)01-0005-05

“结构化、情境化,凸显学科大概念,发展核心素养的功能最强”是教育部课程教材研发中心为了落实立德树人根本任务,自2014年9月起,历时四年研究开发的教学改革重点项目“深度学习研究”最重要的结论成果之一^[1]。“除非把一件件事情放进构造得很好的模型里面,否则就会忘记……”获得的知识,如果没有完美的结构把它关联在一起,那是一种多半会被遗忘的知识。一串不连贯的论据在记忆中仅有短促得可怜的寿命。”这是教育心理学家布鲁纳的认知研究发现^[2]。因此,我们需要有结构的知识学习,这样的知识学习才是有意义的^[3];我们需要情境化的数学学习,这样的学习才能润泽心灵;我们更需要情境化且结构化的能力体验,惟其如此,我们的素养结构才是立体的,并可持续自然生长。《义务教育数学课程标准(2022年版)》(下称“标准”)的课程理念第2部分,明确要求要设计体现结构化特征的课程内容,对重点内容进行结构化整合,探索发展学生核心素养的路径,由此确立了义务教育数学课程的结构化整合特征^[4]。落实这个理念的主要办法当然应该是结构化的数学教学。因此,大单元教学、主题式教学、项目式(整合式)教学成为课程实施的主要选择,从而促进深度学习的发生。

境脉式结构化数学教学,是将知识内容、数学思想、数学活动经验的生长发展脉络镶嵌在适当的情境中,并有机地串联起来,形成相互关联的有

脉络的结构,以便于存储和提取运用。知识镶嵌在情境中,形成结构化体系,并在此基础上进行系统思维,积累探究策略,形成能力结构。当前教学实践中,境脉式结构化特征的教学大多运用于单元复习课、章节起始课或综合实践活动课,鲜有在新授课中的行动研究尝试。本文是境脉式结构化数学教学的新授课探索,尝试建立境脉式结构化数学教学的基本模型和理论框架。

1 境脉式结构化数学教学的课堂形态

以“反比例函数图象性质”第3课时为例,境脉式结构化数学教学的一般结构为:(1)复习旧知(一次函数图象性质的研究)形成结构;(2)类比原结构,自主形成新结构(学生自主提问反比例函数图象性质,明确最近发展区);(3)依据最近发展区的结构境脉(已经进行了哪些研究、还可以联想到哪些研究),学生尝试提出问题,教师补充,师生共同完善问题解决策略;(4)结构性感悟,形成认知结构,获得通性通法。

1.1 复习整理一次函数的研究结构

一次函数结构化研究

• 一次函数概念

如果 $y=(m-1)x^2-m^2+3$ 是关于 x 的一次函数,那么 m 的值为_____。

• 求一次函数表达式(待定系数法)

已知 $y+3$ 与 $x+2$ 成正比例,且当 $x=-3$ 时, $y=7$ 。(1) y 与 x 之间的函数表达式为_____;

(2) 若 y 的取值范围是 $-1 \leq y \leq \frac{1}{2}$, 则 x 的取值范围是 _____.

• 一次函数的图象

一次函数 $y=kx+b$ 的图象与 k, b 符号的关系. 指出下列条件下一次函数 $y=kx+b$ 的图象经过的象限: (1) $k > 0, b > 0$; (2) $k > 0, b = 0$; (3) $k > 0, b < 0$; (4) $k < 0, b > 0$; (5) $k < 0, b = 0$; (6) $k < 0, b < 0$.

反之, 可以画图象的示意图.

• 交点坐标

一次函数 $y=kx+b$ 的图象与两坐标轴的交点坐标为 _____; 一次函数 $y_1=2x-4$ 与 $y_2=-\frac{1}{2}x+8$ 的交点坐标为 _____.

• 一次函数图象的增减性

若一次函数 $y=2x+1$ 的图象经过点 $(-3, y_1), (4, y_2)$, 则 y_1 _____ y_2 .

若一次函数 $y=(2a+3)x+2$ 的函数值 y 随 x 值的增大而减小, 则实数 a 的取值范围是 _____.

已知点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$ 在直线 $y=kx+b$ 上, 且直线经过第一、二、四象限, 当 $x_1 > x_2 > x_3$ 时, y_1, y_2, y_3 之间的大小关系为 _____. (用“>”连接).

直线 $y=kx+b$ 与直线 $y=-x$ 相交于点 A , 则关于 x 的不等式 $-x < kx+b$ 的解集为 _____.

• 研究 k, b 的意义

k, b 的实际意义: 用甲、乙两种具有恒温功能的热水壶同时加热相同质量的水, 甲壶比乙壶加热速度快. 在一段时间内, 水温 $y^\circ\text{C}$ 与加热时间 x s 之间近似满足一次函数关系, 根据记录的数据, 画函数图象如图 1 所示. (1) 求乙壶中水温 y 关于加热时间 x 的函数表达式; (2) 利用函数表达式解释两壶加热前水温和水温变化速度.

k, b 的几何意义: 观察 $y=-x, y=-2x, y=-3x, y=x, y=2x, y=3x$, 感悟倾斜程度; 观察 $y=x-1, y=x-2, y=x+3$, 体会与 y 轴的交点坐标 $(0, b)$.

• 一次函数图象的几何变换

一次函数图象的平移变换: 将一次函数 $y=-2x+5$ 的图象向上平移 2 个单位长度, 则平移后图象对应的函数表达式为 _____; 还可以看作

直线 $y=-2x+5$ 向左平移 _____ 个单位.

一次函数图象的旋转变换(过定点): 已知关于 x 的一次函数为 $y=mx+4m+3$, 则这个函数的图象经过定点 _____.

一次函数图象的对称变换: 与直线 $y=-x+2$ 关于 x 轴对称的直线对应的函数表达式为 _____.

• 一次函数与方程、不等式、面积、三角形

画函数 $y_1=2x-4$ 与 $y_2=-\frac{1}{2}x+8$ 的图象,

观察图象并回答问题: (1) x 取何值时, $2x-4 > 0$ 与 $-\frac{1}{2}x+8 > 0$ 同时成立? (2) 分别求这两个函数的图象与 x 轴所围成的三角形的面积. (两种方法: 利用两函数图象垂直, 或以 x 轴上线段作底边)

1.2 自我建构反比例函数的研究结构

反比例函数研究目标分析: 反比例函数研究通常用 4 课时, 第 1 课时为反比例函数概念及待定系数法, 后 3 课时为图象与性质研究. 图象与性质的前两课时已经研究了图象画法、双曲线、象限与 k 的关系、图象中待定系数、增减性初步运用. 本节课是研究反比例函数性质的第 3 课时, 所以自我建构分两大部分. 第一部分: 类比一次函数的研究结构, 复习与列举反比例函数性质已经研究的部分(以下反比例函数性质联想的 1~4 项); 第二部分: 类比设想本节课继续研究的结构补全.

反比例函数的图象和性质的前两课时中学生已经通过列表、描点、连线的实践感悟, 得到反比例函数图象是两条不连续的双曲线, 以及图象所在象限和增减性的初步认知. 第 3 课时的任务是理解 k 的几何意义, 继续推进增减性的深度运用和对称性的研究.

提问: 请大家类比一次函数的探究结构, 思考反比例函数已经研究了哪些方面、今天的第 3 课时还可能研究哪些方面^[5].

学生充分发言(反比例函数已经研究的几个方面), 教师提供相关运用的具体情境. 以下前 4 个提问是学生的结构化复习, 后 3 个是学生的结构化提问, 教师给出问题模型, 集体分析和解决问题.

学生提问 1 反比例函数的概念. 反比例函数概念及三种表示方法, 纠错提醒: (1) $k \neq 0$; (2) 自变量 $x \neq 0$; (3) 函数 $y \neq 0$. (学生解释理由)

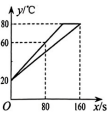


图 1

若 $y = (a+1)x^{a^2-2}$ 是反比例函数, 则 a 的值为().

A. 1 B. -1 C. ± 1 D. 任意实数

学生提问 2 利用待定系数法确定反比例函数. 已知点 $P(-2, -3)$ 在反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象上, 则 k 的值是 ____.

学生提问 3 反比例函数的图象和性质.

(1) 反比例函数的图象是双曲线; (2) 反比例函数的性质(表 1). 反之, 若表 1 中三列知其一, 可得另二列(练习).

表 1 反比例函数的性质

函数图象所在象限	k 的符号	在每个象限的增减性

学生提问 4 反比例函数与一次函数的图象的交点坐标. 已知反比例函数 $y = \frac{6}{x}$ 与正比例函数 $y = mx$ 相交, 其中一个交点是 $A(2, a)$, 则 a 的值为 ____, 另一个交点的坐标为 ____.

学生提问 5 增减性深度运用(以旧引新).

已知反比例函数 $y = \frac{6}{x}$. (1) 若点 $A(-3, y_1)$, $B(-1, y_2)$, $C(2, y_3)$ 都在这个反比例函数的图象上, 比较 y_1, y_2, y_3 的大小; (2) 若点 $D(x, y)$ 在此反比例函数图象上, 当 $-3 < x < -1$ 时, 求 y 的取值范围; (3) 当 $y > 2$ 时, 求 x 的取值范围; (4) 若反比例函数 $y = \frac{6}{x}$ 与正比例函数 $y = mx$ 相交, 其中一个交点是 $A(2, a)$, 则当 $mx < \frac{6}{x}$ 时, x 的取值范围为 ____.

学生提问 6 反比例函数比例系数 k 的实际意义与几何意义. 设菱形的面积是 3 cm^2 , 两条对角线的长分别是 $x \text{ cm}$, $y \text{ cm}$. (1) 写出 y 与 x 的函数表达式, 指出常数 k 的实际意义, 画出函数图象. (2) 在(1)的函数图象上任意取一点 P , 过 P 分别作 x 轴、 y 轴的垂线, 垂足为 N, M , 那么四边形 $ONPM$ 的面积是多少? $\triangle OPN$ 的面积是多少(图 2)? 猜猜这些面积与谁有关系? (3) 在(1)的函数图象上任意取两点 A 和 B , 求 $\triangle OAB$ 面积(图 3).

学生提问 7 根据一次函数综合问题结构, 探索反比例函数图象的几何变换. 对称性: 反比例函数既是轴对称图形又是中心对称图形. 对称轴:

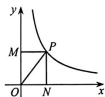


图 2

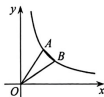


图 3

$y = x$ 和 $y = -x$. 对称中心: 原点.

因有的特殊四边形具有对称性, 所以不妨与反比例函数综合研究. 可以有哪些综合运用?

教师提供应用模型:

(1) 中心对称性

在反比例函数 $y = \frac{6}{x}$ 图象上任取四点 A, B, C, D , 使四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

学生尝试简述画法.

师: 能画多少个?

师: 若给出 $A(2, 3), B(1, 6)$, 求平行四边形 C, D 两点坐标.

师: 总结一下通性通法.

生: 中心对称两点坐标的符号相反、绝对值相等.

师: 再求平行四边形 $ABCD$ 的面积.

生: 先求 $\triangle AOB$ 的面积, 四倍之即可.

(2) 轴对称性

当 $k > 0$ 时图象关于直线 $y = x$ 对称.

在反比例函数 $y = \frac{6}{x}$ 图象上任取四点 A, B, C, D , 使四边形 $ABCD$ 是矩形.

生 1: 取 $OA = OB$, 再找 A, B 两点关于 O 的中心对称点 C, D .

师: 怎样取 A, B 两点?

生 1: A, B 两点交换纵横坐标.

师: 你如何说明此时 $OA = OB$?

生 1: 证两个三角形全等.

生 2: 作直线 $y = x$, 再作它的垂线, 与双曲线交于 A, B 两点.

生 3: 作圆.

师: 这些方法都很好.

延伸思考: 如果给出 $A(2, 3), B(3, 2)$, 怎样求 C, D 坐标和矩形 $ABCD$ 的面积? 如果没给出点 B 的坐标, 你能求出它的坐标吗? 猜想此时 A, B, C, D 四点坐标有什么特征关系?

(3) 获得通法感悟

若 $A(a, b)$, 则矩形的 B, C, D 的坐标是什么? 若 $k < 0$ 时函数图象在二、四象限且关于直

线 $y = -x$ 对称,则矩形四顶点规律如何?

(4) 学生自主结构化小结

以上函数研究的着眼点既是研究一次函数、反比例函数的研究重点,也是其他函数研究的方向,其他函数也可以进行类似的结构化研究.

生:反比例函数图象如何进行平移、旋转研究?

师:对这个问题有兴趣的同学可以课后研究

一下函数 $y = \frac{6}{x+1}$, $y = \frac{6}{x+2}$, $y = \frac{6}{x+3}$, $y = \frac{6}{2x+1}$, $y = \frac{6}{2x+2}$, $y = \frac{6}{2x+3}$. 这里也有平移的通性通法.

2 境脉式结构化数学教学的多维度结构化特征

2.1 知识结构化

(1) 挖掘知识的内在结构,揭示知识构成要素之间的发展关系,形成递升状研究发展态势.类比一次函数研究结构,理解猜测反比例函数研究的路径,从挖掘概念要素,到图象画法、性质猜想与初探,都水到渠成,再到增减性的复杂运用、 k 的实际意义与几何意义的揭示、对称性的深度研究,都是结构化的探索,毫无疑问可以形成结构化知识体系,便于知识的提取运用和进一步加工.

(2) 建立知识的横向结构,揭示同一领域不同知识的相关性,可以使学生的学习走向通透和深刻^[3].在一次函数研究结构的基础上探究反比例函数图象及其性质,探究一次函数的着眼点、探究方法、思维模型都是有借鉴价值的经验,必能帮助学生在认知和解决问题上触类旁通、举一反三,提高思维的变通性和灵活性.

(3) 厘清知识的情境结构,一次函数图象及其性质的情境结合平移、旋转、对称等几何变换研究,给反比例函数研究提供了可以预想的类似情境结构.关于 $y = \frac{6}{x}$ 的一串相关并具有递进性的问题,建立了反比例函数的探究情境,揭示了知识的关联性在解决问题中的作用.两种函数情境结构的建立,树立了其他函数研究的思维模型与思维结构,促进了可持续的研究能力的发展.

2.2 能力结构化

本节课的数学能力教学任务有:反比例函数增减性的互逆运用;象限对变量范围的影响; k 与 b 的实际意义与几何意义;反比例函数中心对称性和轴对称性与特殊四边形对称性结合的通性通

法;类比思想、数形结合、转化思想、方程思想、函数思想等等基本能力结构.这些基本技能、基本思想方法和应用能力与一次函数性质运用技能几乎完全对应,便于形成自主探究结构.这些能力通过

学生对形如 $y = \frac{6}{x}$ 的情境不断演化,可以形成一条清晰的思考脉络,也是探究活动的脉络,并且能够形成有利于将来继续进行函数探究的结构化能力系统.在反比例函数图象几何变换的构想中,评价与判断双曲线的平移和旋转的探究,虽然归纳探究的思路容易建立,但计算量不小,而且证明猜想比较复杂,所以只能课后进行研究.不过这个探究过程给学生带来的体验科学研究的精神引领价值还是非常明确的.能力结构达成的方式兼顾了科学精神、理性精神与探究精神的统一.

2.3 探究策略形态结构化

通过一次函数列表、描点、连线活动获得直线的体验,联想与预设反比例函数图象性质的探究策略.这样的研究策略,将两种函数研究基本结构与探究形态迁移应用到其他函数性质的探究,为后续众多函数研究提供基础探究结构,学生由此获得研究发展的一般路径与方向,能抓住函数研究的本质与基本形态去进行变式,实现自主学习,使自主探究成为可能.

3 境脉式结构化数学教学的课标价值

境脉式结构化数学教学实现课程目标的价值是复合式多层面的,是为了课程目标的深度理解而教.以“33445678”为轴线的课标理念结构,构建了课标的核心要求.

“33”是中国学生三大核心素养和数学的三大核心素养.前者是“正确价值观、必备品格和关键能力”,如果从数学角度看必备品格,这节课的数学必备品格体现在三个方面,即数学美(知识结构之美、课堂结构之美、图象的对称美、平移变换之美)、数学思想(类比思想、转化思想、整体思想)和数学精神.初中阶段要培养的数学精神至少有七个(理性精神、科学精神、人文精神、质疑精神、应用精神、探究精神和创新精神).数学的三大核心素养就是“三会”,即“数学眼光、数学思维、数学语言”.这节课的实际问题中的反比例函数模型是涵育数学眼光,通性通法的猜想探究证明是培养数学思维,函数表达式及通性通法的表达是数学语言的运用和锻炼.

“44”是“四基”“四能”.完成的基础知识学习

有反比例函数图象增减性、对称性知识建构;基本技能演练有反比例函数图象增减性的复杂运用及互逆运用、 k 值与面积关系、图象对称性探究与通性通法;基本思想渗透在图象性质的数形结合、类比思想的结构性探究、面积转换与方程思想的运用;基本活动经验是中心对称性与轴对称性的探究过程、结构化类比提出反比例函数性质的探究路径、双曲线对称性与特殊四边形对称性的复合图形构造研究。“四能”主要体现在利用一次函数研究结构提供的结构化指导、学生自主提出反比例函数需要研究的问题,积累的经验结构对分析问题给予对应的帮助。

“5”是笔者主张的数学课堂的“五个重视”,即重视活动、重视合作、重视思维、重视感悟、重视质疑,是为了实现课程目标,从课程目标理念中提炼的数学教学的五个重要着眼点,能促进实现高阶思维目标和深度学习核心要件的达成。“重视活动”包括各种实践操作探究活动,也包括思维建构活动。“重视合作”既体现了交流精神的需要,也是“金字塔学习理论”的高效学习特征需要。“重视思维”是指不仅重视低阶思维的培养,更要锻炼高阶思维的发展。数学课是“思维体操课”,说明数学思维教学对数学课的价值而言是核心任务。“重视感悟、重视质疑”是活动经历和体验向探究创新的中枢传递,否则,数学教学只能停滞于低阶思维阶段。反比例函数性质的中心对称和轴对称性的结构化探究活动中,有操作活动、有合作互助、有通性通法的归纳、有思想方法感悟,还有质疑辨析($y = \frac{6}{x}$ 与 $y = -\frac{6}{x}$ 对称点规律的辨析)。

“6”是高中数学的六个素养(数学抽象、逻辑推理、数学建模、直观想象、数学运算、数据分析),需要初中数学九个核心素养为之奠基,基本对应于“抽象能力、推理能力、模型观念、空间观念、运算能力、数据观念、应用意识、创新意识”。高中数学素养主要体现形式是抽象思维能力培养及数学学科自身发展的需要。而初中数学素养除了要为将来的学习准备必需的能力素养,还肩负义务教育的责任,培养数学应用能力,为社会生活实践提供必需的数学知识技能和应用意识。反比例函数作为初中研究的第二个函数,学生应当能比较归纳出函数研究的一般方法与路径,有能力处理反比例函数性质与一次函数、方程、不等式、直线型的综合运用,包括所需的思想方法和函数研究技

能。反比例函数图象性质的数形结合到抽象、表达式和点坐标的推理运用、实际问题的建模与应用、发现性质的探究意识与创新意识,都是初中数学素养和高中数学素养的关键而必要的培育。这是一次承前启后的函数研究的经验积累和探究能力的提升。

“7”是“理性精神、科学精神、人文精神、质疑精神、应用精神、探究精神和创新精神”这七个数学精神,是涵育数学品格的关键内容。这节课在函数图象的作图到对称点坐标规律的证明是理性精神和科学精神的体现,科学家对函数概念的构建体现了人文精神,学生对双曲线平移的猜想表明质疑精神渗透有效,学习过程中的猜想探究具有探究精神和创新精神^[6]。

“8”是八个行为动词——“了解、理解、掌握、运用、经历、体验、感悟、探索”,这既是学习方法与学习策略,也是数学教学需遵循的目标、路径与评价方式。几乎与认知目标分类学“认知、理解、应用(低阶思维),分析、综合、评价(高阶思维)”相对应,这节课的教学与每个行为动词及低阶思维、高阶思维都有具体表现,并有所发展,主要创新在于有数学精神和重视学习中感情的参与^[1],使学习活动更趋于丰满而润泽。

以“33445678”的结构统领,我们的教学设计、课堂教学、教学评价都能更好地实现课标理念,使课堂教学更容易接近数学教育目标。

有脉络化的情境,有知识、能力、方法多层面的组织结构,有系统性主动探究,这样的课堂教学能更好地建构知识、探索思考、启迪智慧、愉悦情绪^[1]、涵养和提振精神,直至浸润心灵^[6]。

参考文献

- [1] 刘月霞,郭华.深度学习:走向核心素养(理论普及读本)[M].北京:教育科学出版社,2018:34-45.
- [2] 布鲁纳.教育过程[M].邵瑞珍,译.北京:文化教育出版社,1982:42-48.
- [3] 陆启威.知识结构化:一种必备的学习素养[N].中国教育报,2023-04-20(7).
- [4] 中华人民共和国教育部.义务教育数学课程标准(2022年版)[M].北京:北京师范大学出版社,2022:2-3.
- [5] 贾保柱.类比思想教学实践的思考[J].江苏教育,2013(14):94.
- [6] 贾保柱.基于高阶思维培养的数学深度教学——以“勾股定理”教学为例[J].江苏教育,2023(7):42-46.