高中数学“问题导学”模式的探索与实践

——以“正弦定理”为例

张大春（江苏省响水中学）

摘　要：基于青年教师教学竞赛活动的课堂观摩思考，结合实际情况，围绕如何做好课前准备、课中探究、强化与应用构思布局正弦定理教学；得出学课不是直接照搬，也不是机械模仿，学是一种研究，只有研究性地学，才能感悟名师的教学智慧，发现教学本质，才会在教学实践中有收获。

关键词：正弦定理；优化教学；学课
文章编号：1002-2171(2024)5-0016-03

笔者有幸参加了青年教师教学竞赛活动的“无生教学”课堂观摩，感受到优秀青年教师新颖的教育理念、娴熟的教学手段和丰富的创造力。教学设计环环紧扣，课堂教学流程行云流水，语言教态亲切自然。本文以人教A版《数学》（必修第二册）第六章“平面向量及其应用”中“正弦定理”一节教学为例，谈谈笔者学习后的实践体会。

1　立足整体，优化教学

结合学情，立足教学实际，笔者对本节课进行了重新设计，围绕如何做好课前准备、课中探究、强化与应用进行构思。

1.1　精心设计，复习回顾

考虑活动中教师课堂教学流程虽行云流水，任务完成得也很好，但那是“无生教学”的课堂，学生的“思考和探究”仅是点到为止，没有具体的时间和过程；同时为了落实课程标准提出的“借助向量的运算，探究三角形的边长和角度的关系，掌握正弦定理，能用正弦定理解决简单的实际问题”的要求；利于学生更好更快地掌握向量法，培养学生用向量法解决几何问题的意识和能力，发展学生的数学素养，把有限的时间用于解决关键问题上。笔者设计了课前准备的预习案。

课前预习准备：

(1)回顾余弦定理的探究过程与证明方法，体会向量法的步骤、特点和优势。

(2)用余弦定理可以直接解决给定三角形的哪几种解三角形问题？解是否唯一，并用两个三角形全等的基本事实加以解释。

(3)有余弦定理，大家自然会想到可能还有正弦定理。请大家探究“在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$，a，b，c 间有怎样的定量关系”，这一关系对于锐角三角形和钝角三角形是否仍然成立？请采用构造直角三角形的方法证明？

(4)向量是基本的运算工具，掌握向量法，树立用向量法解决几何问题的意识，对发展学生的数学素养意义深远。在明确三角形三边的向量等式、数量积及其几何意义的基础上，研读教材中用向量法证明正弦定理的过程。

请同学们课前认真思考上述问题，以便在课堂互动中与同学讨论。

1.2　优化整合，引导探究

好的预习案有利于学生课前自主学习，也有利于教师课堂教学。课堂上，教师要做的就是运用这些大量元认知启发、引导学生探究和发现问题本质，并在这个过程中关注学生的思维训练，重视其能力培养和综合素质的提升。

1.2.1　自主交流，展示成果

笔者在课前五分钟时间让学生依据预习案批改情况，针对自己存在的问题进行再思考。学生之间交流错误、探究问题、研讨对策，在交流中议错因、谈联系、找对策、补完整，自然地经历“看、思、听、说”的学习过程，在知识的获取过程中感悟知识、理解掌握知识，进而更好地应用知识，实现有效学习。教师让学生对预习案中的重点问题进行了展示。

展示1：

向量法解决问题的步骤：(1)把问题中涉及的几何元素用向量表示；(2)进行恰当的向量运算；(3)把向量运算结果转化成几何关系。

展示2：

用余弦定理可以解决三种解三角形的题型：

(1)已知三边解三角形。

(2)已知两边及夹角解三角形。

(3)已知两边及一边对角解三角形。

由两个三角形全等的基本事实SSS，SAS可知(1)(2)两种情况的解是唯一的；满足SSA的两个三角形不一定全等，所以情况(3)的解不确定。

展示3：已知两角及一边的解三角形问题，余弦定理不能直接解决，是因为应用余弦定理至少应已知两条边。

对于“在$\triangle ABC$中，已知$\angle A$，$\angle B$，a，求b”的问题，在初中阶段学生已经学习了直角三角形，这为正弦定理的发现、探究奠定了基础。笔者通过批改预习案发现学生根据直角三角形的边角关系，自学教材都能顺利完成，并能够得出“在直角三角形中边与它的对角的正弦的比相等”。为节省时间，在此只展示$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$的形式。

展示4：在$\triangle ABC$中，如图1，有AB边上的高$CD=a\sin B=b\sin A$。

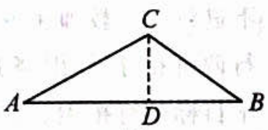

图1

从而可得，$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，

同理可得，$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$。

于是有$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$。

展示5：我认为需要考虑三角形是锐角三角形还是钝角三角形，因为锐角三角形和钝角三角形作出的高不一样。在钝角$\triangle ABC$中，如图2，有$CD=a\sin B=b\sin(\pi-A)=b\sin A$，可得$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$。

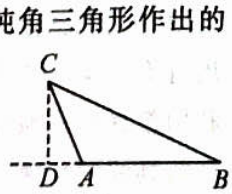

图2

同理可得，$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$。

于是有$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$。

展示6：利用三角形选择不同的底和高，用面积相等来证明。

如图3，过C点作$CD\perp AB$，垂足为D，$h=b\sin A$。于是$\triangle ABC$的面积$S=\frac{1}{2}ch=\frac{1}{2}bc\sin A$。

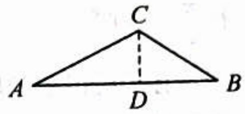

图3

同样可得到三角形面积的另外两种表达形式$S=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C$，经过变形，即可得到正弦定理。

1.2.2 精讲点拨，完善提升

教师在课堂中高观点的点拨和对存在问题的强化，能够有效引导学生完善知识结构，系统联系知识，提炼问题解决的基本方法。

教师：课前大家都进行了预习，通过对预习案的了解和刚才大家的展示，同学们可以很好地将不熟悉的解斜三角形问题转化为熟悉的解直角三角形来解决，进一步体会了转化与化归思想。但没有考虑到三角形为钝角三角形的情况，说明考虑问题不全面，这其实涉及分类讨论思想，尤其要注意分类讨论的原因、对象和标准的确定。

通过预习案笔者发现有个别学生想到作三角形的外接圆，利用直径所对的周角是直角构造直角三角形，但未能很好地完成。笔者建议课下完善，进而完成教材第54页第17题。

由于这节课的第一个重点与难点是用向量法证明正弦定理，所以上述方法让学生课前预习自主探究，上课伊始，师生进行几分钟讨论展示即可，利用有限的时间训练向量法。学生不易想到向量法，有的学生还不理解教材中的证明。笔者通过设计问题串，层层递进，充分调动学生的思维，进而突破“如何用向量法证明正弦定理”这一难点。

教师：请问通过预习时自主研读教材中向量法证明正弦定理的过程，你认为该如何用向量法证明正弦定理？

追问1：与长度、角度有关，采用向量的何种运算来研究？

追问2：向量数量积出现的是角的余弦，而我们要研究角的正弦，如何实现转化？

追问3：已知三角形的内角 A,B，如何找到$\frac{\pi}{2}-A$和$\frac{\pi}{2}-B$呢？

有了对以上问题的思考，关于教材中研究锐角三角形情形下的正弦定理的证明，教师稍做讲评，学生自主完成即可。

教师：设与向量 AC 垂直的单位向量 $\boldsymbol{j}$。$\boldsymbol{j}$ 与$\overrightarrow{AB}$的夹角为$\frac{\pi}{2}-A$，$\boldsymbol{j}$ 与$\overrightarrow{CB}$的夹角为$\frac{\pi}{2}-C$。

由三角形三边的向量等式$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}\Rightarrow\boldsymbol{j}\cdot(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB})=\boldsymbol{j}\cdot\overrightarrow{AB}\Rightarrow\boldsymbol{j}\cdot\overrightarrow{AC}+\boldsymbol{j}\cdot\overrightarrow{CB}=\boldsymbol{j}\cdot\overrightarrow{AB}$，故$|\boldsymbol{j}||\overrightarrow{CB}|\cos\left(\frac{\pi}{2}-C\right)=|\boldsymbol{j}||\overrightarrow{AB}|\cos\left(\frac{\pi}{2}-A\right)$，即$a\sin C=c\sin A$，从而$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$。同理可得其他形式$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$，以及钝角三角形的情况，由学生模仿着完成并展示自己的探究成果。

展示后，师生再共同完善证明过程。教师再一次引导学生体会向量法的特点和优势，积累用向量法解决几何问题的数学活动经验。

1.2.3 深化认识，揭示本质

得到正弦定理是本节课的第二个重点，为揭示其数学本质，强化对正弦定理的再认识，笔者设计了问题串，以进一步引导学生思考探究。

(1)请你用文字语言、符号语言、图形语言表述正弦定理。

(2)正弦定理表达式有怎样的结构特征？

(3)正弦定理有几个等式，每个等式中有几个元素？

通过本问题勾起学生对连等式如何使用的回忆和方程思想的强化应用，$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$（其中 R 为三角形外接圆的半径），引导学生得出正弦定理的变形。

(4)结合正弦定理的表达式，思考利用正弦定理可以解决哪类三角形问题？

1.2.4 强化应用，提升能力

利用正弦定理解三角形是本节课的第三个重点。应用正弦定理解决简单的实际问题，培养学生逻辑推理、数学运算等素养。

对于教材中的例题7，即已知两角及一边解三角形问题，学生可自主完成。学生完成后，教师进一步追问“请大家思考其解唯一的原因”，再一次复习两个三角形全等的判定定理，也为下一道题有两解及其原因分析做铺垫。

2 教学反思

经过本次学课、研课和上课，笔者深刻感受到课堂教学不是直接照搬，也不是机械模仿，学习是一种研究，只有研究性学习，发现教学本质，才会在教学实践中有收获，有进步。更重要的是，教师在教学中能把这种研究的精神和意识传递给学生，让学生不仅学会知识，学会学习，更学会研究。

2.1 紧扣课标，设计教学

新授课教学的首要目标就是依据课程标准，充分利用教材，引导学生重视教材，认真研读教材。笔者利用预习案指导学生课前自主预习，通过学生对预习案问题的思考探究，实现他们在预习中认真研读教材，并学会思考。关注教材不是教师简单地重复教材内容，而是要通过设置问题，帮助学生理解概念和掌握公式本质，发现数学思想和数学方法，预习案的设置能有力引导学生朝着这个方向发展。

2.2 根据学情，合理取舍

本节课的教学设计是在笔者批改预习案的前提下进行的。教师注重从学情出发，对学生预习情况进行调研和分析，围绕其存在的问题进行点拨，根据教学目标进行拓展、引申。这样，使得教学符合课程标准的要求，也更贴近学生实际。整节课教学设计大体分为三个部分：正弦定理的获取和推导过程（尤其是向量法证明正弦定理）、正弦定理的再认识和正弦定理的应用。正弦定理的推导过程是针对学生预习中考虑不全的地方，引导完善，侧重的是对向量法的理解和应用方面的训练。正弦定理的再认识主要是为了使学生熟悉定理的形式及其变形，为正弦定理的应用打下坚实的基础。正弦定理的应用环节，教师充分利用教材中的典型例题，注重体现他们的思维过程，规范其解题步骤。

怎么上这节课更有效？笔者注重教学的螺旋式上升，使学生对数学知识的理解逐渐深入；同时，顺应学生的思路教学，适时采用问题引领，使学生在不断解决问题的过程中获取知识、应用知识。