在解题过程中促进对数学知识的深度学习
——以 2023 年上海市闵行区高三数学二模 16 题为例

贺怀栋

（上海市七宝中学，上海　201101）

教育部基础教育课程教材发展中心刘月霞在文[1]中提出，深度学习是指在教师引领下，学生围绕着具有挑战性的学习主题，全身心积极参加、体验成功、获得发展的有意义的学习过程. 在高中数学的学习过程中，不仅有对教材知识的深度学习，在解题过程中也要重视对问题的深入研究，不仅要知其然，还要知其所以然，进一步知其所必然. 下面笔者以 2023 年闵行区高三数学二模 16 题为例，分析如何一步一步探究其规律，深度挖掘与理解问题的本质与内涵.

试题呈现如下：

若数列 $\{b_n\}$、$\{c_n\}$ 均为严格增数列，且对任意正整数 n，都存在正整数 m，使得 $b_m \in [c_n, c_{n+1}]$，则称数列 $\{b_n\}$ 为数列 $\{c_n\}$ 的“M 数列”. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，则下列选项中为假命题的是（　　）.

（A）存在等差数列 $\{a_n\}$，使得 $\{a_n\}$ 是 $\{S_n\}$ 的“M 数列”；

（B）存在等比数列 $\{a_n\}$，使得 $\{a_n\}$ 是 $\{S_n\}$ 的“M 数列”；

（C）存在等差数列 $\{a_n\}$，使得 $\{S_n\}$ 是 $\{a_n\}$ 的“M 数列”；

（D）存在等比数列 $\{a_n\}$，使得 $\{S_n\}$ 是 $\{a_n\}$ 的“M 数列”.

1　问题解决

若在考场上遇到此题，可以通过举出特例，来说明存在性，从而快速得到答案.

对于（A），取 $a_n = n$，$n \in \mathbf{N}^*$，则 $\{S_n\}$ 为严格增的正整数数列，显然对于任意的正整数 n，总存在正整数 $m \in [S_n, S_{n+1}]$，即 $a_m \in [S_n, S_{n+1}]$，符合“M 数列”定义，所以（A）是真命题；

对于（B）和（D），取 $a_n = 2^{n-1}$，$n \in \mathbf{N}^*$，则 $S_n = 2^n - 1$，$n \in \mathbf{N}^*$，显然 $a_1 = S_1 < a_2 < S_2 < a_3 < S_3 < \cdots < a_n < S_n < a_{n+1} < S_{n+1} < \cdots$，由题干定义可知，此时 $\{a_n\}$ 是 $\{S_n\}$ 的“M 数列”，$\{S_n\}$ 也是 $\{a_n\}$ 的“M 数列”，所以（B）和（D）均为真命题；

根据排除法，本题答案选（C）.

2　深度分析

此时，我们不禁要问：为什么（C）选项中的命题是假命题呢？也就是说为什么不存在等差数列 $\{a_n\}$，使得 $\{S_n\}$ 是 $\{a_n\}$ 的“M 数列”？

对于任意严格增的等差数列 $\{a_n\}$，显然公差 $d > 0$，取 k 为大于 $\dfrac{3d - a_1}{d}$ 的正整数，则 $S_{k+1} - S_k = a_{k+1} = a_1 + kd > 3d$，假设 $\{S_n\}$ 是 $\{a_n\}$ 的“M 数列”，不妨设 $S_k \in [a_n, a_{n+1}]$，显然不存在 S_m 满足 $S_m \in [a_{n+2}, a_{n+3}]$，否则 $S_m - S_k \leqslant a_{n+3} - a_n = 3d$，与 $S_{k+1} - S_k > 3d$ 矛盾，因此 $\{S_n\}$ 不是 $\{a_n\}$ 的“M 数列”，（C）为假命题.

3　探究本质

由上述分析可以看出，对任意严格增的等差数列 $\{a_n\}$，$\{S_n\}$ 都不是 $\{a_n\}$ 的“M 数列”，而 $\{a_n\}$ 可能是 $\{S_n\}$ 的“M 数列”. 那么，怎样的等差数列 $\{a_n\}$，是其前 n 项和数列 $\{S_n\}$ 的“M 数列”呢？

显然 $\{a_n\}$ 的公差 $d > 0$，要使数列 $\{S_n\}$ 也是严格增数列，则 $a_2 > 0$，即 $a_1 > -d$. 此时，显然 $a_1 \in [S_1, S_2]$. 当 $n \geqslant 3$ 时，$S_n - S_{n-1} = a_n = a_1 + (n-1)d \geqslant a_1 + 2d > d$，而 $a_1 < S_{n-1}$，且 $\{a_n\}$ 中每一项比前一项增加 d，所以一定存在一项 $a_m \in [S_{n-1}, S_n]$，综上可得，当且仅当 $d > 0$，$a_1 > -d$ 时，$\{a_n\}$ 是 $\{S_n\}$ 的“M 数列”.

推出等差数列的结论后，继续探究，等比数列的情况怎么样呢？

对于等比数列$\{a_n\}$，若$\{a_n\}$和$\{S_n\}$都是严格增数列，则$a_1>0$, $q>1$，因此满足$0<a_1=S_1<a_2$，当$n\geqslant 2$时，显然$a_n<S_n$，由于

$$S_n-a_{n+1}=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}-a_1q^n =a_1\frac{q^n(q-2)+1}{1-q},$$

因此当$q\geqslant 2$时，$S_n<a_{n+1}$，即$0<a_1=S_1<a_2<S_2<a_3<S_3<\cdots<a_n<S_n<a_{n+1}<S_{n+1}<\cdots$，因此当$q\geqslant 2$时，$\{a_n\}$是$\{S_n\}$的"M数列"，$\{S_n\}$也是$\{a_n\}$的"M数列".

当$1<q<2$时，由于$q^n(q-2)+1$关于正整数n严格递减，且当$n=1$时，$q(q-2)+1=(q-1)^2>0$，当$n>\log_q\frac{1}{2-q}$时，$q^n(q-2)+1<0$，因此一定存在正整数t，使得

$$q^t(q-2)+1\geqslant 0,$$
$$q^{t+1}(q-2)+1<0,$$

即有$S_1<a_2$, $S_2<a_3$, $\cdots$, $S_{t-1}<a_t$, $S_t\leqslant a_{t+1}$, $S_{t+1}>a_{t+2}$, $S_{t+2}>a_{t+3}$, $\cdots$.

若$S_t<a_{t+1}$，显然不存在m，使得$S_m\in[a_{t+1}, a_{t+2}]$，此时$\{S_n\}$不是$\{a_n\}$的"M数列"；若$S_t=a_{t+1}$，即$q^t=\frac{1}{2-q}$，显然$t\geqslant 2$，由$a_{t+1}=S_t\geqslant a_t+a_{t-1}$，可知$q^2\geqslant q+1$，则当$n>t$时，

$$S_n-a_{n+2}=a_1\frac{q^n(q^2-q-1)+1}{1-q}<0,$$

因此$a_{n+1}<S_n<a_{n+2}$，即$0<a_1=S_1<a_2<\cdots<a_t<S_t=a_{t+1}<a_{t+2}<S_{t+1}<a_{t+3}<S_{t+2}<\cdots$，此时$\{S_n\}$是$\{a_n\}$的"M数列".

综上：当$1<q<2$时，若对任意正整数n，均有$q^n(q-2)+1\neq 0$，则$\{S_n\}$不是$\{a_n\}$的"M数列"；若存在某个正整数n_0，使得$q^{n_0}(q-2)+1=0$，则$\{S_n\}$是$\{a_n\}$的"M数列".

当$1<q<2$时，$\{a_n\}$是否为$\{S_n\}$的"M数列"呢？

显然$a_1\in[S_1, S_2]$，对任意$n\geqslant 2$，可以用反证法证明不存在正整数m满足$a_m<S_n<S_{n+1}<a_{m+1}$，假设上述不等式成立，由于$\frac{a_{m+1}}{a_m}=q$, $\frac{S_{n+1}}{S_n}=\frac{a_1+qS_n}{S_n}>q$，矛盾.

因此在区间$[S_n, S_{n+1}]$中一定有$\{a_n\}$中的项，即$\{a_n\}$是$\{S_n\}$的"M数列".

由上述分析过程可以知道，对于等差数列$\{a_n\}$，若$\{a_n\}$和$\{S_n\}$都是严格增数列，即当$d>0$, $a_1>-d$时，$\{a_n\}$一定是$\{S_n\}$的"M数列"，$\{S_n\}$一定不是$\{a_n\}$的"M数列".

对于等比数列$\{a_n\}$，若$\{a_n\}$和$\{S_n\}$都是严格增数列，即当$a_1>0$, $q>1$时，$\{a_n\}$一定是$\{S_n\}$的"M数列"，$\{S_n\}$不一定是$\{a_n\}$的"M数列"，细分如下：当$q\geqslant 2$时，$\{S_n\}$是$\{a_n\}$的"M数列"，当$1<q<2$时，若对任意正整数n，均有$q^n(q-2)+1\neq 0$，则$\{S_n\}$不是$\{a_n\}$的"M数列"；若存在某个正整数n_0，使得$q^{n_0}(q-2)+1=0$，则$\{S_n\}$是$\{a_n\}$的"M数列".

4　发散思维

经历了上述探究过程，我们对问题的本质有了一定的认识，在这个基础上我们还可以发散思维，将这个问题进行推广，继续做一些更加深入的研究.

推广1　放宽条件限制

已知数列$\{b_n\}$、$\{c_n\}$，若对任意正整数n，都存在正整数m，满足$(b_m-c_n)(b_m-c_{n+1})\leqslant 0$，则称数列$\{b_n\}$为数列$\{c_n\}$的"M数列".

上述推广中，去掉了两个数列单调性的限制，借助于不等式呈现项与项之间的关系，对原来等差数列与等比数列的相关问题，依然可以作出相关的探究.

若数列$\{a_n\}$为等差数列，前n项和为S_n，只需探究数列$\{a_n\}$的公差$d=0$和$d>0$两种情况（若$d<0$，借助于$\{-a_n\}$得出相关结论即可）.

当$d=0$且$a_1=0$时，显然$\{a_n\}$是$\{S_n\}$的"M数列"，$\{S_n\}$也是$\{a_n\}$的"M数列".

当$d=0$且$a_1\neq 0$时，$\{a_n\}$不是$\{S_n\}$的"M数列"，$\{S_n\}$是$\{a_n\}$的"M数列".

当$d>0$时，借助原问题中探究可以知道$\{S_n\}$依然不是$\{a_n\}$的"M数列"；$\{a_n\}$是$\{S_n\}$的"M数列"的条件将变得更加宽泛，在探究过

程中,若要满足$\{a_n\}$是$\{S_n\}$的"M数列",必须满足$S_3 \geqslant S_1$,即$a_1 \geqslant -\frac{3}{2}d$,此时$a_4 = a_1 + 3d \geqslant \frac{3}{2}d > d$,所以当$n \geqslant 3$时,一定存在一项$a_m$满足$(a_m - S_n)(a_m - S_{n+1}) \leqslant 0$,又$a_1 = S_1$,因此只需存在一项$a_t$满足$(a_t - S_2)(a_t - S_3) \leqslant 0$即可,按此思路,容易得到相应结论.

若数列$\{a_n\}$为等比数列,前n项和为S_n,只需再探究数列$\{a_n\}$的首项$a_1 > 0$,公比$q = 1$, $0 < q < 1$和$q < 0$三种情况(若$a_1 < 0$,借助于$\{-a_n\}$得出相关结论即可).

当$a_1 > 0$、$q = 1$时,$\{a_n\}$不是$\{S_n\}$的"M数列",$\{S_n\}$是$\{a_n\}$的"M数列";

当$a_1 > 0$、$0 < q < 1$时,$\{a_n\}$不是$\{S_n\}$的"M数列",$\{S_n\}$也不是$\{a_n\}$的"M数列";

当$a_1 > 0$、$q < 0$时,由于数列$\{a_n\}$中的项正负交替出现,相邻两项之间的区间长度要么趋向于0,要么趋向于无穷大,要么是一个常数,因此根据数列前两项以及极限的思想,不难研究出相应结论.

推广2　改变研究对象

若数列$\{b_n\}$、$\{c_n\}$均为严格增数列,且对任意正整数n,都存在正整数m,使得$b_m \in [c_n, c_{n+1}]$,则称数列$\{b_n\}$为数列$\{c_n\}$的"M数列".

若$\{b_n\}$为等差数列,$\{c_n\}$为等比数列,探究$\{b_n\}$是否为$\{c_n\}$的"M数列",$\{c_n\}$是否为$\{b_n\}$的"M数列",若是,需要满足的条件有哪些?

对于这个问题,当$\{c_n\}$的首项$c_1 > 0$,公比$q > 1$时,从直观上看,等比数列的增长速度会远超于等差数列的增长速度,因此$\{c_n\}$一定不是$\{b_n\}$的"M数列".

假设$\{b_n\}$的公差为d,只要$c_{n+1} - c_n \geqslant d$,则一定存在一项$b_m$满足$(b_m - c_n)(b_m - c_{n+1}) \leqslant 0$,因此只需研究$\{c_n\}$中前有限项之间是否存在$\{b_n\}$中某一项即可,在给出数列$\{b_n\}$、$\{c_n\}$的一些相关信息的前提下,可以得到相应的结论.

当$\{c_n\}$的首项$c_1 < 0$,公比$0 < q < 1$时,显然$\{b_n\}$一定不是$\{c_n\}$的"M数列";根据极限的思想,也可以判断出$\{c_n\}$一定不是$\{b_n\}$的"M数列".

上面是给出两种类型的推广方法,以及相应的研究思路.对问题的深度学习和探究,让我们对该内容有了更加深刻的认识,不仅知道答案是什么,还知道为什么是这样,以及一般情形下的结论有哪些,逐渐把握住问题的本质与内涵,还能推广到更一般情境下的研究,促进我们对数学的深度理解,逐渐内化为解决问题的能力.因此,在我们平时的解题过程中,不能仅仅满足于问题的解决,更要有探究精神和发散思维的意识,并且重视对知识内容的深度学习和探究,这将对数学能力的提升大有裨益.

参考文献

[1] 刘月霞.深度学习:走向核心素养[M].北京:教育科学出版社,2018.

(上接第1-21页)

[2] 张昆,张乃达.暴露数学思维过程的课堂教学研究[J].中学数学,2018(2):61-64.

[3] 约翰·D·布兰思福特.人是如何学习的(扩展版)[M].程可拉,孙亚玲,王旭卿,译.上海:华东师范大学出版社,2013:60.

[4] 弗赖登塔尔.作为教学任务的数学[M].陈昌平,唐瑞芬,译.上海:上海教育出版社,1995:109-112.