关于柱体、锥体与旋转体的讨论

林　磊[1]　蒋宝童[2]

(1. 华东师范大学数学科学学院，上海　200241；2. 马鞍山市教育科学研究院，安徽　马鞍山　243000)

上教版的高中数学必修(第三册)教材[1]的第 11 章介绍的内容是简单几何体，主要包括柱体、锥体、多面体与旋转体. 本文仅对其中的柱体、锥体与旋转体以及与此相关的曲面做一些拓展性的讨论.

1　柱体与柱面

我们把棱柱与圆柱统称为柱体. 棱柱的英文是 prism，圆柱的英文是 cylinder. 但是我们的教材中却没有指出柱体的英文，且“柱体”一词也没有加粗，这是为什么？事实上，英文中就没有与中文统称“柱体”相对应的词汇！

在介绍棱柱时，我们会提到直棱柱与斜棱柱的概念. 那么，大家会不会有这样的疑问：一个多面体，会不会同时既是直棱柱，又是斜棱柱？

这个问题的提出，可能会使很多人感到困惑，因为当一个棱柱的底面确定时，该棱柱是直棱柱还是斜棱柱应该是确定的！因此，我们的问题实际上是指：是否存在一个多面体，当我们以不同的面作为底面时，其在一种底面的取法下是直棱柱，而在另一种底面的取法下却是斜棱柱？这样的例子是有的：一个底面是平行四边形(但不是矩形)的直四棱柱，则它的每个侧面都是矩形. 以其中的任意一个矩形作为下底面，则它仍可看成一个四棱柱，但是此时它却是个斜棱柱. 由于棱柱的每个侧面必须是平行四边形，所以如果一个直棱柱通过更换底面后还是一个棱柱，那么，原来的底面必须还是一个平行四边形. 因此，恰有四个矩形侧面的平行六面体是既是直棱柱又是斜棱柱的唯一例子.

教材中提到了旋转面. 我们这里也来介绍一下柱面的概念.

一条直线 L 沿着一条平面曲线 C 作平行移动所产生的曲面称为**柱面**. L 的每个位置都称为柱面的**母线**，C 称为柱面的**准线**[2].

依上述柱面的定义，平面也是柱面. 而除了平面外，柱面的母线方向(也称为柱面的方向)是唯一的，而平面的母线方向有无限多个.

如果准线是圆，母线方向为该圆所在平面的法线方向，则得到的柱面就是圆柱面.

如果将上述圆柱面中的准线分别替换为椭圆、双曲线或抛物线，则我们就得到了椭圆柱面(含圆柱面)、双曲柱面及抛物柱面，统称为二次柱面.

我们知道，抛物线是一条平面曲线，它的定义是：在平面内，到定点与到不过该定点的定直线距离相等的点的轨迹.

如果我们将上述定义中的“在平面内”改为“在空间内”，问：得到的点的轨迹是什么曲面呢？答案是：抛物柱面.

我们来证明上述结论. 如图 1，假设 M 是空间中到定点 F 与到不过该定点的定直线 l 距离相等的点的轨迹所构成的曲面. 设 α 是由点 F 与直线 l 所确定的平面，则 M 与平面 α 的交是一条以 F 为焦点、l 为准线的抛物线 C. 假设 N 是以 C 为准线，平面 α 的法向量方向为柱面方向的抛物柱面. 我们来证明 $M=N$.

设点 P 是 M 中不在 α 内的任意一点，设 Q 是 P 在 α 上的投影，R 是 P 在直线 l 上的投影. 则 $PQ\perp\alpha$，于是，QR 是 PR 在平面 α 上的投

[3] 中华人民共和国教育部. 义务教育数学课程标准(2022 年版)[S]. 北京：北京师范大学出版社，2022.

[4] 弗赖登塔尔. 作为教育任务的数学[M]. 陈昌平，唐瑞芬，译. 上海：上海教育出版社，1995.

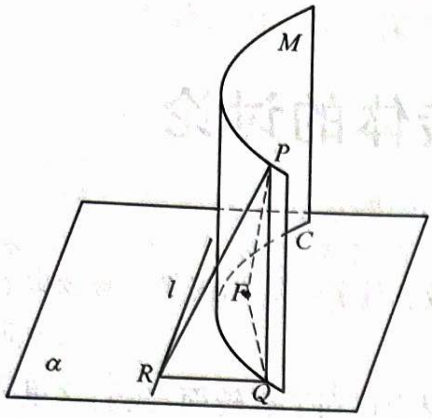


图1

影，且 $RQ \perp PQ$，$FQ \perp PQ$，于是，三角形 PRQ 与三角形 PFQ 都是直角三角形. 由勾股定理知 $PR^2 = RQ^2 + PQ^2$，$PF^2 = FQ^2 + PQ^2$. 又 P 在 M 上，因此，$PR = PF$，从而 $RQ = FQ$. 又因为 $PR \perp l$，所以由三垂线定理知，$RQ \perp l$，于是点 Q 在抛物线 C 上，从而 P 在曲面 N 上.

反之，对于曲面 N 上的任意点 P，设过 P 的母线与抛物线 C 交于点 Q，则 $PQ \perp \alpha$，过点 Q 向 l 作垂线，垂足为 R，即 $l \perp RQ$，且 $RQ = FQ$. 由三垂线定理，斜线 $RP \perp l$. 又由勾股定理得 $PR = PF$，也就是点 P 到直线 l 的距离与到点 F 的距离相等，即 P 在 M 上. 因此，$M = N$.

我们也可以用解析法求出抛物柱面的方程. 建立空间直角坐标系，使得点 F 的坐标为 $\left(0,\ \frac{p}{2},\ 0\right)$，直线 l 的方程为 $\begin{cases} y = -\frac{p}{2}, \\ z = 0. \end{cases}$ 设 $P(x,\ y,\ z)$，则 $PF = \sqrt{x^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2 + z^2}$，点 P 到直线 l 的距离为 $d = \sqrt{\left(y + \frac{p}{2}\right)^2 + z^2}$，由 $PF = d$ 化简得 $x^2 = 2py$，这就是准线为 xOy 上的抛物线、母线方向平行于 z 轴的抛物柱面方程.

2　锥体与锥面

我们把棱锥与圆锥统称为锥体. 棱锥的英文是 pyramid，圆锥的英文是 cone. 但是我们的教材中却没有指出锥体的英文，且“锥体”一词也没有加粗，其原因是，英文中也没有与中文统称“锥体”相对应的词汇！

关于四棱锥，有如下不太显然的结论：

假设 $P-ABCD$ 是个四棱锥，且底面 $ABCD$ 是个凸四边形，则存在与每个侧棱都相交的平面，该平面与四棱锥的侧面的交线构成一个平行四边形.

证明：记 $AC \cap BD = O$. 在平面 PAC 内过点 O 作直线分别交射线 PA、PC 于点 M、N，当点 N 充分远离点 P 时，必有 $OM < ON$；当点 M 充分远离点 P 时，必有 $OM > ON$. 因为 OM 和 ON 的长度都是连续变化的，因此，在直线的移动过程中，必存在点 M、N 使得 $OM = ON$. 同理，在平面 PBD 内过点 O 作直线分别交射线 PB、PD 于点 S、T，必存在点 S、T 使得 $OS = OT$. 此时，四边形 $MSNT$ 为平行四边形，作平面 α // 平面 $MSNT$，且 α 与四棱锥的四条侧棱都相交，则易知 α 与四棱锥的侧面交线构成平行四边形.

与柱面的定义类似，我们也可以给出一般锥面的定义.

在空间中通过一个定点 P 并与定曲线 C 相交的一族直线所生成的曲面称为**锥面**. 这些直线称为锥面的**母线**，P 称为锥面的**顶点**，C 称为锥面的**准线**[2].

由此定义可知，教材[1]中提到的圆锥面不仅是旋转面，也是一个锥面. 该锥面的准线可选为关于旋转轴垂直的平面与该曲面的交线圆，故而称为圆锥面.

可以证明：使用平面与圆锥面相截，所得的截线在非退化的情况下就是圆、椭圆、双曲线以及抛物线. 而退化的情况则包括点、直线、以及一对相交直线. 正是基于这一事实，我们把椭圆、双曲线，以及抛物线统称为圆锥曲线. 但是由于圆锥是一个有界的几何体，所以它的侧面与平面的交线可以是圆和椭圆（或它们的一部分），但只能得到抛物线的一部分，也只能得到双曲线的一支的一部分.

大家可能会问，如果我们把确定圆锥面的准线圆改为椭圆、双曲线或者抛物线，得到的会是什么锥面？是否可分别称为椭圆锥面、双曲锥面或抛物锥面？实际上，这样得到的锥面是同一类锥面，我们把它称为二次锥面，以顶点为坐标原点，适当建立空间直角坐标系，其标准方程都可以写为

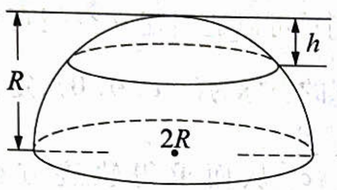
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

如果取圆为准线，圆心为顶点，则这样构成的锥面就是该圆所在的平面. 因此，平面也可以看成是个锥面，只是这个锥面太特殊了，平面上的任意点都可以成为锥面的顶点. 而其他锥面的顶点都是唯一的.

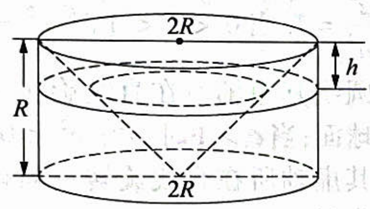
3　旋转体与旋转面

我们知道，球是旋转体. 如果用平面将球体截为两部分，则每一部分都称为**球缺**. 截面叫做球缺的底面，垂直于截面的直径被截后剩下的线段长叫做球缺的高. 假设球缺的高为 h，球缺所在球的半径为 $R(\geqslant h)$，则仍依据教材[1]中"11.4 节"中半径为 R 的半球以及半径为 R 高为 R 的圆柱与圆锥间的关系（如图 2），并利用祖暅原理及圆台的体积公式，得球缺的体积

$$\begin{aligned}V_{球缺} &= \pi R^2 h-\frac{\pi}{3}(R^2+R(R-h)\\&\quad+(R-h)^2)h\\&=\frac{\pi h^2}{3}(3R-h).\end{aligned}$$



(1)



(2)

图 2

可以验证，当 h 大于 R 时此公式仍成立.

不过，通常人们并不能直接从测量中得到球缺所对应的球半径 R 的值，但却能够方便地得到球缺的底面圆半径 r 的值. 利用关系式 $R=\dfrac{r^2+h^2}{2h}$，可得球缺体积公式的另一表达式：

$$V_{球缺}=\frac{\pi h}{6}(3r^2+h^2).$$

同样地，当 h 大于 R 时此公式也成立.

如果用平面将球面截为两部分，则每一部分都称为**球冠**. 球冠就是球缺表面的曲面部分，对应球缺的底面和高，分别叫做球冠的底和高.

设球冠面积为 S，则

$$\frac{1}{3}SR=V_{球缺}+\frac{1}{3}\pi r^2\cdot(R-h).$$

将 $V_{球缺}=\dfrac{\pi h}{6}(3r^2+h^2)$ 及 $R=\dfrac{r^2+h^2}{2h}$ 代入化简，得

$$S=2\pi Rh=\pi(r^2+h^2),$$

其中，对任意 $0<h<2R$ 公式都成立.

教材[1]在第 11 章的旋转体一节中已经引入了旋转面的概念：一条平面曲线 C（包括直线、折线等）绕其所在平面上的一条直线 l 旋转一周所形成的空间图形称为旋转面. 这条直线 l 称为旋转面的轴，而该条平面曲线 C 称为旋转面的母线. 但是，在旋转面的定义中，母线为与旋转轴共面的平面曲线的限制并非必要，它也可以是一条空间曲线，见文[2].

教材[1]在引入旋转面概念后，考虑了一条直线 a 绕另一条直线 l 旋转一周所形成的曲面问题. 我们来延续这一讨论. 当直线 a 与直线 l 相交且垂直时，a 绕 l 旋转一周后得到的曲面就是一个平面，也就是说，平面也可看作是个旋转面，只是它太特殊了：与平面垂直的每条直线都是它的轴. 因此，平面既是柱面，又是锥面，还是旋转面. 只有平面有这么特殊的性质！当直线 a 与直线 l 相交但不垂直时，a 绕 l 旋转一周后得到的曲面就是一个圆锥面.

如果直线 a 与直线 l 异面，那么，当 a 与 l 垂直时，a 绕 l 所得旋转面是平面挖去一个圆面（不包括圆周），设 P 与 Q 分别是 a 和 l 与它们的公垂线交点，则该圆的圆心为 Q，该圆为由点 P 绕直线 l 旋转一周而得.

当直线 a 与 l 异面，且 a 与 l 不垂直时，所得的曲面就比较有趣了，它称为旋转单叶双曲面，其形状近似于"小蛮腰"（广州新电视塔，如图 3）. 旋转单叶双曲面相当于将一条双曲线绕它的虚轴所在直线旋转一周所得，这也是它的

称呼的由来. 注意到它是连通的(不能分割为不相交的两部分,即单叶). 如果没有上一段的描述,我们可能不太相信这样一个旋转面是由直线生成的!

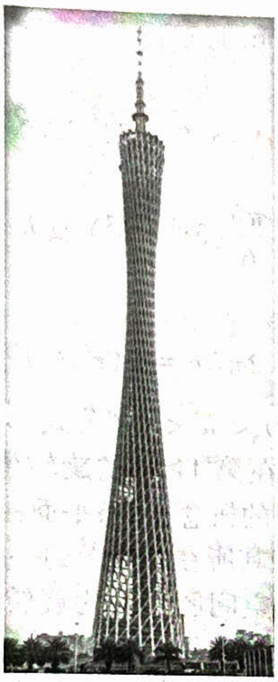


图3

我们知道,双曲线可定义为:平面内,到两定点的距离之差的绝对值为定值(小于两定点间的距离)的点的轨迹. 但如果我们将点的轨迹不限于平面内,即考虑:空间内,到两定点的距离之差的绝对值为定值的点的轨迹,问:所得的轨迹曲面是什么?答案就是旋转双叶双曲面,它是将一条双曲线绕它的实轴所在直线旋转一周所得的旋转面. 它可分为不连通的两部分(即双叶),每一部分都是由作为母线的双曲线的一支绕轴旋转所得.

根据定义,椭圆是平面内到两定点的距离和等于定值(大于两定点间的距离)的点的轨迹. 我们同样可考虑:空间内,到两定点的距离和等于定值的点的轨迹是什么曲面?答案是旋转椭球面. 它可看成是由椭圆绕其长轴所在直线旋转一周所得.

我们还知道,圆锥曲线有统一定义:平面内到定点 F 与到定直线 $l(F \notin l)$ 的距离比值为常数 e 的点的轨迹. 当 $e=1$ 时,轨迹为抛物线;当 $0<e<1$ 时,轨迹为椭圆;当 $e>1$ 时,轨迹为双曲线.

如果将轨迹从平面拓展到空间,前面已经知道当 $e=1$ 时,轨迹为抛物柱面. 那么,当 $0<e<1$ 和 $e>1$ 时,轨迹分别是什么呢?

先看一个特例:求空间内到点 $F(-1,0,0)$ 与到定直线 $\begin{cases} x=-4, \\ z=0 \end{cases}$ 的距离之比为 $\frac{1}{2}$ 的点的轨迹.

设点 $P(x,y,z)$ 为轨迹上任一点,则 $\frac{\sqrt{(x+1)^2+y^2+z^2}}{\sqrt{(x+4)^2+z^2}}=\frac{1}{2}$,整理得所求轨迹方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}+\frac{z^2}{4}=1$. 它是 xOy 平面内的椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 绕其短轴所在直线旋转一周得到的旋转椭球面.

一般地,对于定点 F 和定直线 l 以及常数 $e=\frac{c}{a}$,我们总可以适当建立空间直角坐标系,使得定点 F 的坐标为 $(-c,0,0)$,定直线 l 的方程为 $\begin{cases} x=-\frac{a^2}{c}, \\ z=0, \end{cases}$ 从而求得轨迹方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}+\frac{z^2}{a^2}=1$. 当 $0<e<1$ 时,$a^2-c^2>0$,它表示椭圆绕其短轴所在直线旋转一周得到的旋转椭球面;当 $e>1$ 时,$a^2-c^2<0$,它表示双曲线绕其虚轴所在直线旋转一周得到的旋转单叶双曲面.

参考文献

[1] 李大潜,王建磐. 普通高中教科书 数学必修第三册[M]. 上海:上海教育出版社,2022.

[2] 陈志杰. 高等代数与解析几何(下册)[M]. 2版. 北京:高等教育出版社,2008.