核心素养导向的数学概念理解教学

——以“值域”为例

余海东（浙江省义乌市义亭中学）

摘　要：核心素养导向的数学概念教学是一个引导学生由表及里理解概念的过程，具体包括：着眼概念的形象表达，发展直观想象素养；着眼概念的情境意义，发展数学抽象素养；着眼概念的核心思想，发展逻辑推理素养。

关键词：数学概念；直观想象；数学抽象；逻辑推理；值域

文章编号：1002-2171(2024)9-0030-03

《普通高中数学课程标准（2017年版）》在“基本理念”一节提出“高中数学教学以发展学生数学学科核心素养为导向”[1]。数学概念是数学的基础，是数学教学的重要内容。调研发现，一些教师认为数学概念大多是一种规定，教学时仅满足于学生获得概念、了解概念的定义和用概念判断，不重视在概念教学中发展学生的数学核心素养，从而造成概念教学价值的流失。

概念教学的根本目标是让学生理解概念。学生理解概念是一个由表及里、逐步深入的过程。“表”指的是“结构，形式”，“里”指的是“本质，规律”。课堂上，有经验的教师不仅会引导学生从静态的视角看待数学概念的“表”，还会从动态的视角揭示数学概念的“里”，教学时强调学生思维的积极参与，注重对概念本质的感悟，从而为培养和发展数学核心素养创造了空间。

为探究核心素养导向的数学概念理解教学，笔者以“值域”为例进行课堂实践和思考。

1　着眼概念的形象表达，发展直观想象素养

数学概念具有抽象的特点。为此，学生获得概念后，教师要及时引导学生运用表格、图形等形式表达数学概念的含义，让数学概念“看得见摸得着”。有助于增强数学的亲和力，促进学生对数学概念的理解，发展直观想象素养。

如人教A版普通高中教科书《数学》（必修第一册）“3.1.1函数的概念”[2]，引出“对应说”函数概念的下位概念“值域”后，可以给出以下教学片段。

引导语　对于从数量角度给出定义的数学概念，我们常常寻求其形象表达，也就是“以形释数”。“以形释数”可以展现数学概念灵动活泼的一面，帮助我们把握其本质，用数轴上的点表示实数就是一例。你能给出值域的形象表达吗？

教师：值域是对应关系作用于定义域的结果，因而值域的形象表达需要结合值域与定义域、对应关系的内在联系。

初中学习中积累了用图像刻画两个变量之间关系的经验，学生提出：画出函数的图像，因为图像上点的纵坐标是横坐标对应的函数值，所以纵坐标的取值范围就是值域，从而值域可以用图像上的点在y轴上的射影表示。

追问1：教材第60-61页，问题1（列车行进路程问题）、问题2（维修工人工资问题）、问题3（空气质量指数问题）和问题4（恩格尔系数问题）的值域分别是什么？它们对应的函数图像形状有什么特点？

问题1、问题3对应的函数图像分别是线段、曲线，问题2、问题4对应的函数图像是若干个离散点。

追问2：我们知道，反比例函数的图像有两条渐近线，你能从定义域、值域的角度作出说明吗？

课堂小结：一般地，值域可以用y轴上若干个离散点、线段或直线等表示。从上面的问题（追问1和追问2）不难看出，图形具有整体的特点，能够生动刻画量之间的内在联系，帮助我们理解数学对象，提供数学推理的思维基础。

拓展　把函数$y=x$和$y=\frac{1}{x}$分别做加、减运算可以产生新函数$y=x+\frac{1}{x}$和$y=x-\frac{1}{x}$，你能指出这两个新函数的图像的渐近线吗？

点评：以概念理解教学带动学生直观想象素养的

发展，关键是增强学生利用图形描述、分析问题的意识，引导学生分别从数和形的角度理解数学对象，建立数与形的联系（如追问1）。为此，要用好教材资源（如章头语、引题和例题等），从学生的知识经验出发（如追问2），启发学生思考。就上面的教学过程来说，如果学生能理解值域是图像上点的纵坐标的集合，用这些点在 y 轴上的射影予以表达，可以认为达到直观想象素养水平一的要求；如果学生能够准确回答上面的追问1和追问2，说明学生能够把握图形和数量的关系，并且运用它探索规律，根据数学核心素养评价的满意原则（以下简称"满意原则"）[1]，可以认为达到直观想象素养水平二的要求；对于拓展问题，如果能够指出直线 $x=0$ 和直线 $y=x$ 都是新函数的图像的渐近线，说明学生注意到了"x 不能取0，但可以无限趋近于0"和"$x\to\infty$ 时，$\frac{1}{x}\to 0$"，并准确反映在图像上，可以认为达到直观想象素养水平三的要求。

2 着眼概念的情境意义，发展数学抽象素养

数学概念从来不是孤立的存在，而总是处于一定的问题情境之中。概念的情境意义，指的是概念在问题解决中发挥的作用、体现的价值。理解数学概念的情境意义，可以增强学生用概念思维的意识，提高学生分析问题的能力。具体来说，课堂上提供嵌入概念内涵的数学问题，引导学生把它转化为概念应用的问题，体会概念在问题解决中发挥的重要意义。

学生理解了值域概念的意义后，教师可以给出以下引导语和思考题，让学生体会值域概念的情境意义。

引导语 知识学习的目的是应用，包括显性层面的应用和隐性层面的应用。就数学概念来说，前者指直接用问题中给出的概念思考问题，后者指问题中没有给出有关概念，需要在分析的基础上运用有关概念思考问题。

思考题：已知 A 是非空数集，a 是常数。如何理解并用符号表示以下问题？

(1)关于 x 的方程 $f(x)=a$ 在 A 内有实根；

(2)存在 $x\in A$，使得不等式 $f(x)>a$ 成立；

(3)对于任意 $x\in A$，不等式 $f(x)>a$ 成立。

学生1：

设 $f(x)$ 是定义在 A 上的函数，其值域为 M，得到：思考题(1)$\Leftrightarrow$存在 $x\in A$，使得 $f(x)=a$ 成立$\Leftrightarrow a\in M$；思考题(2)$\Leftrightarrow$集合 M 存在大于 a 的元素$\Leftrightarrow M\cap(a,+\infty)\neq\varphi$；思考题(3)$\Leftrightarrow$集合 M 的所有元素都大于 $a\Leftrightarrow M\subseteq(a,+\infty)$。

课堂小结：许多数学问题可以归结为元素与集合的关系问题〔如思考题(1)〕或者集合与集合的关系问题〔如思考题(2)，(3)〕。

拓展 已知 A,B 都是非空数集，a 是常数。如何理解"存在 $x\in A$，使得对于任意 $y\in B$，不等式 $f(x)>g(y)$ 成立"？

点评：思考题(1)—(3)实际上要求提出一类问题的解决模型，并用符号语言表征。如果学生会从函数的视角看待这些思考题，认识到它们与值域有关，可以认为达到数学抽象素养水平一的要求；如果还能正确给出元素 a 与集合 M、集合 $(a,+\infty)$ 与集合 M 的关系，说明学生能够在新的情境中运用数学概念提出解决问题的方法，根据满意原则，可以认为达到数学抽象素养水平二的要求。对于拓展问题，如果能整合思考题(2)—(3)的经验方法详述思考过程，给出正确的解决方案，说明学生能够在抽象层面处理综合性问题，可以认为达到数学抽象素养水平三的要求。

3 着眼概念的核心思想，发展逻辑推理素养

引导学生从概念的内涵出发，在分析和解决具体问题的实践中感悟概念蕴含的数学思想，这是推进数学概念本质理解的基本途径，也是发展逻辑推理素养的有效手段。

值域概念的内涵是"对应关系下自变量值的存在性"。具体地说，若函数的定义域为 A，那么集合 M 是该函数的值域，当且仅当满足以下两个条件：(1)对于任意的 $y_0\in M$，存在（一个或多个）$x_0\in A$，使得 x_0 的函数值等于 y_0；(2)对于任意的 $y_0\notin M$，不存在 $x_0\in A$，使得 x_0 的函数值等于 y_0。教学时，可以给出以下教学片段。

引导语 理解数学概念的重要方法是"做数学"，也就是从概念的内涵出发，探索与概念直接相关问题的解决途径、方法，从中体悟概念蕴含的数学思想。就值域概念来说，基本的"做数学"是运用值域概念求具体函数的值域。

问题1：求函数 $y=\frac{2x^2-x+1}{x^2-2x}$ 的值域。

对于二次函数，学生不难通过配方推出其值域。该解析式有四个位置出现自变量 x，配方法难以奏效。

教师：值域是函数值的集合。一个数是不是某函数的函数值，判断的标准是什么？

根据函数值概念的定义，判断的标准为"是否存

在自变量的值 m,使得它对应的函数值是 n”。由此,同学们得到:“数 m 是 $y=\frac{2x^2-x+1}{x^2-2x}$ 的函数值”的充要条件是“存在 $x\in\mathbf{R}$,使得 $m=\frac{2x^2-x+1}{x^2-2x}$”。

追问:“存在 $x\in\mathbf{R}$,使得 $m=\frac{2x^2-x+1}{x^2-2x}$”的本质是什么?

学生2:联想方程概念得到本质是关于 x 的方程 $m=\frac{2x^2-x+1}{x^2-2x}$ 有实根,故值域是使得关于 x 的方程 $m=\frac{2x^2-x+1}{x^2-2x}$ 有实根的数 m 的集合。

教师:这是你熟悉的方程类型吗?数学活动中,变形是一种重要的手段,借助变形,常常可以让问题从陌生走向熟悉。

尝试把分式化为整式,即在方程左右两边同乘以 x^2-2x,得 $m(x^2-2x)=2x^2-x+1$。进一步整理,得到 $(m-2)x^2+(1-2m)x-1=0$。 (*)

教师:变形前后的方程等价吗?为什么?

学生3:一方面,方程 $m=\frac{2x^2-x+1}{x^2-2x}$ 的实根 x 满足 $x^2-2x\neq0$,即 $x\neq0$ 且 $x\neq2$。另一方面,$x=0$ 或 $x=2$ 时,$2x^2-x+1\neq0$,所以 $x=0$ 和 $x=2$ 都不是方程(*)的实根。可见,变形前后方程等价,由此保证了 m 取值范围的一致性。

教师:方程(*)有实根的充要条件是什么?

教师提醒学生当 $m=2$ 时方程(*)并非一元二次方程。师生互相补充,得到:

当 $m=2$ 时,方程(*)是一元一次方程,它有实根 $x=-\frac{1}{3}$,所以 $m=2$ 是原函数的一个函数值;当 $m\neq2$ 时,方程(*)是一元二次方程,它有实根的充要条件是 $\Delta=4m^2-7\geqslant0$,即 $m\geqslant\frac{\sqrt{7}}{2}$ 或 $m\leqslant-\frac{\sqrt{7}}{2}$。注意到 $2>\frac{\sqrt{7}}{2}$,所以 m 的取值范围是 $m\geqslant\frac{\sqrt{7}}{2}$ 或 $m\leqslant-\frac{\sqrt{7}}{2}$,原函数的值域是 $\left\{y\,\middle|\,y\geqslant\frac{\sqrt{7}}{2}\text{或}y\leqslant-\frac{\sqrt{7}}{2}\right\}$。

课堂小结:值域概念的等价定义是“使得关于 x 的方程 $f(x)=m$ 在定义域内有实根的实数 m 的集合”。由此,求函数 $f(x)$ 的值域就是探求使得关于 x 的方程 $f(x)=m$ 在定义域内有实根的充要条件。可见值域概念蕴含方程思想和转化思想。转化过程应保持等价,以确保 m 的取值“不多一个,不少一个”,这体现了数学的严谨性要求。

拓展 若实数 a,b 满足 $(a+2b)(a-3b)=4$,分别求 $b,a-b$ 的取值范围。

点评:一个数是否是某函数的函数值,判断标准是是否存在与之对应的自变量值。问题1在直接法求值域遇阻的情况下,经过教师的启发,学生认识到“函数 $f(x)$ 的值域就是使得 $m=f(x)$ 在定义域内有实根的数 m 的集合”,可以认为达到逻辑推理素养水平一的要求;把方程变形为结构如一元二次方程的形式,能够分析方程的等价性并通过 $m=2$ 和 $m\neq2$ 的讨论获得正确答案,说明学生能够分层次、有条理地思考,根据满意原则,可以认为达到逻辑推理素养水平二的要求;对于拓展问题,实际上是思考“实数 b 在什么范围内取值时,满足 $(a+2b)(a-3b)=4$ 的实数 a 存在”,以及“实数 $a-b$ 在什么范围内取值时,满足 $(a+2b)(a-3b)=4$ 的实数 a,b 存在”。前者需要把已知等式看成关于 a 的一元二次方程 $a^2-ba-6b^2-4=0$;后者需要运用整体思维,即设 $t=a-b$ 得 $a=t+b$,把它代入 $(a+2b)(a-3b)=4$,得 $(t+3b)(t-2b)=4$,再把它看成关于 b 的一元二次方程 $6b^2-tb-t^2+4=0$,从而转化为前者的类型。如果能够完成这些思维和转化过程,说明学生感悟值域概念蕴含的数学思想,实现了新情境下数学方法的迁移性应用,可以认为达到逻辑推理素养水平三的要求。

4 结语

人教A版普通高中教科书《数学》(必修第一册)“主编寄语”指出:“概念是数学的精要所在,必须深刻理解、牢固掌握,因此概念学习要‘慢慢来’”[2]。依循“慢慢来”理念的数学概念理解教学,三个着眼点(形象表达、情境意义和核心思想)既相对独立,又相互交融,共同促进学生对概念的理解和数学核心素养的发展。其中,概念的理解是“明线”,数学核心素养的发展是“暗线”。需要指出的是,就“暗线”来说,每一阶段的教学除了思考文中数学核心素养达到的水平等级,还要分析还可以为发展哪些数学核心素养做出贡献。

参考文献:

[1] 中华人民共和国教育部.普通高中数学课程标准(2017年版)[M].北京:人民教育出版社,2018.

[2] 人民教育出版社,课程教材研究所,中学数学课程教材研究开发中心.普通高中教科书A版·数学(必修第一册)[M].北京:人民教育出版社,2019.