基于知识发生过程的高中数学作业设计策略

樊彦朝[1]　熊志权[2]

(1. 珠海市第一中学,广东　珠海　519000;2. 珠海市教育研究院,广东　珠海　519000)

国务院办公厅《关于新时代推进普通高中育人方式改革的指导意见》提出,提高作业设计质量,精心设计基础性作业,适当增加探究性、实践性、综合性作业. 作业改革和普通高中育人方式的改革紧密地联系在一起,2021 年教育部公布了"双减"政策,这一政策的实施对所有的中小学来说是一个巨大的挑战. "双减"政策对五项管理提出了明确要求,其中作业管理是非常重要的组成部分. 新时代教育改革背景下对作业的提质增效是非常必要的.

基于知识发生过程的教学是指教师引导学生揭示或感受知识发生的过程. 简单地讲,就是再现知识的来龙去脉,揭示知识的本质与联系. 我国目前的基础教育教学普遍重视知识结果的传授,轻视知识发生过程的教学,因此,立足于知识发生过程的教学,探讨作业的改革对当前课堂教学改革具有指导意义. 高中数学作业设计中教师让学生感受数学知识发生的前提或原因,让学生理解数学概念和知识扩充的过程以及向前发展的路径,是一种较为合理的作业优化设计思路.

本文以一道三角恒等式习题为例,在知识发生过程的教学基础上,为"双减"政策下的提质增效项目提供了一种作业设计策略.

习题展现:观察以下各等式:

$$\sin^2 30° + \cos^2 60° + \sin 30°\cos 60° = \frac{3}{4},$$

$$\sin^2 20° + \cos^2 50° + \sin 20°\cos 50° = \frac{3}{4},$$

$$\sin^2 15° + \cos^2 45° + \sin 15°\cos 45° = \frac{3}{4}.$$

分析上述各式的共同特点,写出能反映一般规律的等式,并对等式的正确性作出证明.

习题来自人民教育出版社 A 版普通高中教科书数学必修第一册第 230 页 18 题,属于拓展探索类题目. 教师给学生发挥空间,引导学生观察三个式子的特点并归纳规律.

1　传统的作业设计

教师布置课后作业,绝大多数同学通过观察和归纳,能够推测结论:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) + \sin\alpha\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{4}. \qquad ①$$

个别同学推测的结论形式可能略有不同:

若 $\beta = \alpha + \frac{\pi}{6}$, 则

$$\sin^2\alpha + \cos^2\beta + \sin\alpha\cos\beta = \frac{3}{4}. \qquad ②$$

部分同学能够完成等式的证明. 我们对①式的证明进行思路分析.

思路 1:观察①式,左侧是关于 α 的正、余弦函数的二次齐次式,右侧是一个常数. 对等式左侧使用积化和差公式,或半角公式转化成正、余弦函数的一次式;或者先对 $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)$ 使用两角和的余弦公式,再化简整理得到结果.

此思路比较常见,学生容易掌握.

思路 2:利用同角三角函数关系,构造对偶式,实现证明.

记 $x = \sin^2\alpha + \cos^2\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) + \sin\alpha\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)$,

$y = \cos^2\alpha + \sin^2\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)$

$$+\cos\alpha\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right),$$

则 $x+y=2+\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{6}\right)$，$y-x=\cos 2\alpha-\cos\left(2\alpha+\frac{\pi}{3}\right)+\sin\frac{\pi}{6}$，整理得 $x=\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\left[\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{6}\right)-\cos 2\alpha+\cos\left(2\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\right]$，因为 $\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{6}\right)-\cos 2\alpha+\cos\left(2\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=0$，从而实现证明.

此思路虽不常见，但思路依据也是有迹可循的. 其主要基于两方面：一是此式子是一个恒等式，二是充分利用了一些已知的恒等式，如 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，$\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\cos 2\alpha$，$\sin\alpha\cos\beta-\cos\beta\sin\alpha=\sin(\alpha-\beta)$.

传统的作业设计是教师引导学生，根据题目中提供的三个式子，归纳出一般性的结论. 至此，师生已经获得了一般性的结论，并完成了证明，绝大多数老师和同学的探究到此就结束了.

2　基于知识发生过程的作业设计

作为高中数学作业设计的优化，如果要帮助学生理解知识的源头，从数学的本质上去获取习题的育人价值，实现数学思维的进阶，那么还可以继续向前探究. 这对学生数学发散性思维的培养也大有裨益. 因此教师在传统的作业设计基础上，进行基于知识发生过程的作业设计，让学生在一系列深度活动中发展思维. 设计思路如图 1：

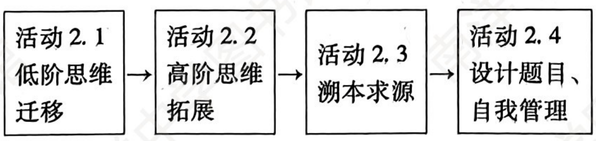

图 1

活动 2.1　低阶思维迁移

教师做出适当引导，学生对原习题的三个等式进行了变形，得

$$\sin^2\frac{\pi}{6}+\sin^2\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{6}=\frac{3}{4},$$

$$\sin^2\frac{\pi}{9}+\sin^2\frac{2\pi}{9}+\sin\frac{\pi}{9}\sin\frac{2\pi}{9}=\frac{3}{4},$$

$$\sin^2\frac{\pi}{12}+\sin^2\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{12}\sin\frac{\pi}{4}=\frac{3}{4}.$$

推测三个等式的一般规律为：

$$\sin^2\theta+\sin^2\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)+\sin\theta\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)=\frac{3}{4}, \quad\cdots\cdots③$$

个别同学会写成：若 $\phi+\varphi=\frac{\pi}{3}$，则

$$\sin^2\phi+\sin^2\varphi+\sin\phi\sin\varphi=\frac{3}{4}. \quad\cdots④$$

［活动意图］ 事实上，对比③式和①式，可以发现二者在形式上略有不同，但本质是相同的. 不同之处在于，③式都是用正弦的形式进行表达，给人的感觉非常整齐，有一种和谐的美感，而且更加接近我们要寻找的背景. 当然这种思维迁移只是一种基础性的迁移. 很多时候，知识的生成不是一蹴而就的，需要慢慢地探索，在探索中寻找真相.

活动 2.2　高阶思维拓展

"问题"是课堂活动的源泉，深度学习让学生的成长从提高"解答试题的能力"转向提高"解决问题的能力"，进而转向提高"做事的能力"，最终成长为"完整的人". 基于此，教师设计了两组题目，要求学生计算每组的结果，然后尝试猜想一般性结论，并证明.

第一组：

$$\sin^2\frac{\pi}{12}+\sin^2\frac{2\pi}{3}-\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{12}\sin\frac{2\pi}{3}=\_\_\_\_\_\_,$$

$$\sin^2\frac{\pi}{4}+\sin^2\frac{\pi}{2}-\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{2}=\_\_\_\_\_\_,$$

$$\sin^2\frac{\pi}{3}+\sin^2\frac{5\pi}{12}-\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{5\pi}{12}=\_\_\_\_\_\_.$$

第二组：

$$\sin^2\frac{\pi}{6}+\sin^2\frac{2\pi}{3}-\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{6}\sin\frac{2\pi}{3}=\_\_\_\_\_\_,$$

$$\sin^2\frac{\pi}{4}+\sin^2\frac{7\pi}{12}-\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{7\pi}{12}=\_\_\_\_\_\_,$$

$$\sin^2\frac{\pi}{3}+\sin^2\frac{\pi}{2}-\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{2}=\_\_\_\_\_\_.$$

课堂采用小组合作学习的形式，教师引导

学生分组处理习题. 根据第一组习题, 学生获得计算结果, 并猜想出结论:

$$\sin^2\beta+\sin^2\left(\frac{3\pi}{4}-\beta\right)-\sqrt{2}\sin\beta\sin\left(\frac{3\pi}{4}-\beta\right)=\frac{1}{2}. \quad ⑤$$

根据第二组习题, 学生获得计算结果, 并猜想出结论:

$$\sin^2\chi+\sin^2\left(\frac{5\pi}{6}-\chi\right)-\sqrt{3}\sin\chi\sin\left(\frac{5\pi}{6}-\chi\right)=\frac{1}{4}. \quad ⑥$$

学生能够完成⑤式、⑥式的证明.

[活动意图] 教师设计的两组题目中涉及的角度都是特殊的, 学生不用计算器就可以求得式子的结果. 学生根据特殊角的三角函数值求得结果, 猜测并证得结论. 学生获得成功的喜悦, 更会引发"为什么会有这么漂亮的结论"的深思. 为了寻找更一般的规律, 让学生亲身感受知识生成的过程, 教师要避免灌输式教学, 积极引导学生参与到知识的发现过程, 并在数学知识发现过程中完成数学知识的建构.

活动 2.3　溯本求源

教师引导学生, 对获得的三个结论进行比照:

$$\sin^2\theta+\sin^2\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)+\sin\theta\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)=\frac{3}{4},$$

$$\sin^2\beta+\sin^2\left(\frac{3\pi}{4}-\beta\right)-\sqrt{2}\sin\beta\sin\left(\frac{3\pi}{4}-\beta\right)=\frac{1}{2},$$

$$\sin^2\chi+\sin^2\left(\frac{5\pi}{6}-\chi\right)-\sqrt{3}\sin\chi\sin\left(\frac{5\pi}{6}-\chi\right)=\frac{1}{4}.$$

观察这三个等式, 这里有几个特殊的角: $\frac{\pi}{3}$、$\frac{3\pi}{4}$、$\frac{5\pi}{6}$, 特殊的数字: $\sqrt{2}$、$\sqrt{3}$、$\frac{3}{4}$、$\frac{1}{2}$、$\frac{1}{4}$, 这几个特殊的角和特殊的数字之间貌似没有关系, 但实则是有关联的. 关联情况如下表:

表 1

α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin^2\alpha$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$
$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{4}$

教师引导学生发散思维, 学生应该不难猜测出更一般的规律:

$$\sin^2\theta+\sin^2(\lambda-\theta)+2\cos\lambda\sin\theta\sin(\lambda-\theta)=\sin^2\lambda. \quad ⑦$$

经过证明, ⑦式是成立的, 且该式已经非常漂亮了. 等式中涉及三个角 θ、$\lambda-\theta$、λ 的三角函数值满足一定的规律, 但是单从三个角看不出规律性.

[活动意图] 知识的学习并不是学习者对知识的被动接受, 而是学习者对知识的自主建构. 教师不应急于把前人的经验直接呈现给学生, 而要引导学生积极参与到数学知识的发现和推理过程, 把浓缩的数学结论充分稀释还原, 使学生充分体验数学知识的生成过程.

根据诱导公式四, $\sin(\pi-\lambda)=\sin\lambda$, $\cos(\pi-\lambda)=-\cos\lambda$. 我们对⑦式进行改进, 获得

$$\sin^2\theta+\sin^2(\lambda-\theta)-2\cos(\pi-\lambda)\sin\theta\sin(\lambda-\theta)=\sin^2(\pi-\lambda). \quad ⑧$$

⑧式中涉及三个角 θ、$\lambda-\theta$、$\pi-\lambda$, 这三个角的三角函数值满足一定规律, 它们的和恰好是 π.

于是, 我们获得了一个简洁的结论:

若 $A+B+C=\pi$, 则

$$\sin^2B+\sin^2C-2\cos A\sin B\sin C=\sin^2A. \quad ⑨$$

在 $\triangle ABC$ 中, ⑨式的证明是非常容易的. 证明思路如下:

根据正弦定理, $a=2R\sin A$, $b=2R\sin B$, $c=2R\sin C$ (R 是 $\triangle ABC$ 外接圆半径), 又根据余弦定理, $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$, ⑨式即可获

得证明.

[活动意图] 在三角形中,正弦定理、余弦定理反映了三角形的边角关系. ⑨式将三角形的边隐藏,呈现了一种角的关系,而它的本质还是余弦定理. 当然,⑨式可以看作是余弦定理的另一种形式,也可以说是余弦定理的推广形式. 溯本求源,来之不易,过程是曲折的,但是获得的结果令人满意. 在溯源的过程中,发展了学生的思维,更加培养了学生追求"大道至简"的品质.

活动 2.4 设计题目,自我管理

我们获得了⑨式,其实是获得了一个以余弦定理为背景的二级结论. 根据这个结论,教师引导学生进行自主命题. 教师列举几道学生命制的题目:

$\sin^2 5° + \sin^2 25° + \sqrt{3}\sin 5°\sin 25° =$ ________;

$\sin^2 5° + \cos^2 65° + \sqrt{3}\sin 5°\cos 65° =$ ________;

$\sin^2 22° + \sin^2 23° + \sqrt{2}\sin 22°\sin 23° =$ ________;

$\sin^2 22° + \cos^2 67° + \sqrt{2}\sin 22°\cos 67° =$ ________.

[活动意图] 同学们进行命题的过程,实现了对知识的进一步理解与思考. 这一活动要求较高,同时也体现出差异化作业的设计理念. 作业的差异化与开放性设计为不同思维层次的学生提供了选择的机会,认知水平较高的学生可以自主命题,进一步提升自我效能感,实现知识管理的升华. 自主命题让学生思维的深度和广度得到进一步发展. 学生思维的发展和深度探究而引发的知识重新建构,正是知识发生过程教学的应有之义.

3 反思与建议

探究性、实践性、综合性作业是高中育人方式的重要内容. 优化作业设计是"双减"政策下五项管理中非常重要的一项. 传统的数学作业设计的目的是让学生巩固课堂所学知识,考查学生对课堂内容的掌握程度,帮助教师诊断学生学习情况. 作业设计分为三个环节:布置作业、批改作业、讲评作业. 教师在作业布置时要考虑学生的差异性,布置分层作业;教师在批改作业时要考虑针对性和时效性,一对一面批作业最有效,而且批改作业要及时;讲评作业不仅仅是讲解题目的解答过程,还要对学生作业中遇到的问题进行归类,同时还要准备一两道类似的题目让学生练习.

"双减"政策下作业管理的提质减负,不只要提高作业布置的质量,更要提高整个教育教学环节的质量. 提高作业设计的质量不仅需要从横向上布置一些题目,发挥作业诊断、巩固、学情分析等功能,更要从纵向上进行作业的设计. 纵向作业设计策略是在传统作业设计基础上加强低阶思维迁移、设置高阶思维拓展、引导溯本求源、激励设计题目等环节. 基于知识发生过程教学的作业设计,能将外在的教学内容通过思维操作和加工的教学材料转化为学生内在的精神力量. 传统的作业设计局限于巩固课堂所学知识,偏重于计算的熟练度和机械记忆的结论以及对结论的简单运用. 基于知识发生过程的作业设计,是在传统的作业设计基础上,充分利用了学生已有的知识和经验作为生长点去生成知识,让学生去感悟知识的来龙去脉,发展学生的思维,提升教育内在质量.

参考文献

[1] 裴光勇,陈佑清. 知识发生过程教学的内涵和价值[J]. 中国教育学刊,2001(1):48-51.

[2] 刘芳霞,熊志权. 知识形成过程的教学研究与实践[M]. 长春:东北师范大学出版社,2018:5.

[3] 樊彦朝,熊志权. 基于知识发生过程的高中数学深度学习教学策略——以"正弦函数的单调性"教学为例[J]. 数学教学,2022(1):10-14.

[4] 樊彦朝,金华. 2013 年广东高考理科卷第 17 题分析及启示[J]. 中学数学研究,2013(12):7-9.

[5] 人民教育出版社,课程教材研究所,中学数学课程教材研究开发中心. 普通高中教科书 A 版数学必修第一册[M]. 北京:人民教育出版社,2019:230.