关于上海高中数学新版教材导数内容的讨论*

林　磊

(华东师范大学数学科学学院，上海　200241)

根据中华人民共和国教育部新修订的《普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订)》[1]对课程内容的设置，上海市终于将导数内容列入了高中数学课程. 这一新内容被安排在上海教育出版社出版的新版普通高中教科书数学选择性必修第二册[2]的第五章，其章标题是“导数及其应用”. 本文中，我们将对该版教材这一章的部分内容做一简单讨论.

1　关于导数的定义

我们先从导数概念的定义开始. 在教材中，函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数的定义为

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

其实，在普通的大学《高等数学》或《数学分

所以要证 $MN^2=\frac{8ab}{-k}$，只需证明 $4DN^2=8a\cdot DR$，即证 $DN^2=2a\cdot DR=DF\cdot DR$. 由引理，$M$、$R$、$N$、$F$ 是调和点列，故 $(DN+DR)(DF-DN)=(DN-DR)(DF+DN)$，展开化简得 $DN^2=DF\cdot DR$.

4　与 2021 年北京高考解析题的区别与联系

(2021 年北京高考 20 题) 已知椭圆 E：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 过点 $A(0,-2)$，以四个顶点围成的四边形面积为 $4\sqrt{5}$.

(Ⅰ) 求椭圆 E 的标准方程；

(Ⅱ) 过点 $P(0,-3)$ 的直线 l 斜率为 k，交椭圆 E 于不同的两点 B、C，直线 AB、AC 分别交 $y=-3$ 于点 M、N，若 $|PM|+|PN|\leqslant 15$，求 k 的取值范围.

相同点：如图 5，两道题都是过椭圆 E 外一点 P 引一条斜率为 k 的直线 l 与椭圆 E 相交于 B、C 两点，然后过顶点 A 作两条直线 AB、AC 分别交水平直线于 M、N 两点，最后一个条件都是给出与 M、N 有关的线段数量关系，而且都是探究斜率取值问题.

区别：详见表 1.

2021 年的解析几何题也可以用前面的方法进行高观点的解释，感兴趣的读者可以继续探究这两道题目在高观点下的区别与联系.

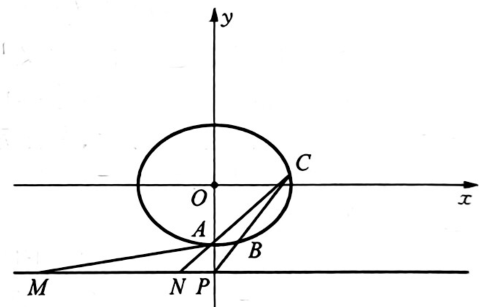

图 5

表 1

区别	2022 年解析几何题	2021 年解析几何题
椭圆方程 E	$\frac{x^2}{4}+y^2=1$	$\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$
点 P	$P(-2,1)$	$P(0,-3)$
点 A	$A(0,1)$	$A(0,-2)$
水平直线	$y=0$	$y=-3$
M、N 相关长度	$\|MN\|=2$	$\|PM\|+\|PN\|\leqslant 15$
所求问题	求 k 的值	求 k 的取值范围

* 基金项目：上海高中数学教材的实验与评价(15500-412221-19021/004).

析》教材中,导数是以增量比的极限的形式出现的. 称上述 h 为自变量 $x=x_0$ 处的增量(本教材中称为变化量),记作 Δx,而由此得到的函数值的增量,记作 Δy 或 Δf,即 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$,于是函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数为
$f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.

之所以在目前的高中教材中没有提到增量,也没有出现 Δx 和 Δy 等记号,估计编者是想避免引入新术语和新符号,以降低课程的难度. 虽然两者表达的意思是相同的,但是目前这样的处理,可能对于学生来说更容易接受,没有那种唬人的感觉,体现了新教材在细节上以学生为本的理念.

2 关于可导与连续的关系

如果要比较严格地引入并讨论导数,是需要先引入连续这个概念的. 但是本教材因为仅仅只有一章的容量来简单介绍导数内容,因此,并没有也无法给出函数连续性的定义与性质,而只是在讨论函数的最值时,对连续函数做了一个粗略的直观描述. 实际上,利用定义导数的方式,我们也可以对函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续给出如下定义:

如果函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处及其附近有定义,且 $\lim\limits_{h\to 0}f(x_0+h)=f(x_0)$,则称函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续. 如果函数 $y=f(x)$ 在区间 I 的每点处都连续,则称函数 $y=f(x)$ 是区间 I 上的连续函数.

函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处存在导数 $f'(x_0)$,也称 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导,它实际上是以在 $x=x_0$ 处连续为前提的. 这是因为当 h 趋近于 0 时,分式 $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ 的分母趋近于 0,所以,若欲使分式有一确定的极限,则其分子必须趋近于 0,即 $f(x_0+h)$ 趋近于 $f(x_0)$. 也可以这样来证明:记 $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}-f'(x_0)=g(h)$. 由于 $f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$,因此,当 h 趋近于 0 时,$g(h)$ 趋近于 0. 而 $f(x_0+h)-f(x_0)=f'(x_0)h+g(h)h$,于是 $\lim\limits_{h\to 0}(f(x_0+h)-f(x_0))=\lim\limits_{h\to 0}(f'(x_0)+g(h))h=0$,即 $\lim\limits_{h\to 0}f(x_0+h)=f(x_0)$,因此,$y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续.

函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处存在导数,则它在 $x=x_0$ 处必然连续,但是反之不必然. 例如,考虑绝对值函数 $y=f(x)=|x|$,它在 x 轴的每点处都连续,但在 $x_0=0$ 处,当 $h>0$ 时,$f(x_0+h)-f(x_0)=f(h)-f(0)=h$,因此,$\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\dfrac{h}{h}=1$;当 $h<0$ 时,$f(x_0+h)-f(x_0)=f(h)-f(0)=-h$,因此,$\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\dfrac{-h}{h}=-1$, 于是 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ 不存在,即函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数不存在. 不过,在教材第五章中并没有给出导数不存在的例子,这是一个小小的遗憾.

3 关于导数的运算法则

有关导数的运算法则,教材中主要介绍了导数的四则运算与简单复合函数的导数,其中教材中的公式(7)是导数的乘法法则,又称莱布尼茨法则. 由该公式,并利用数学归纳法,可得到多个函数乘积的导数公式:

$$(f_1(x)f_2(x)\cdots f_n(x))'=f_1'(x)f_2(x)\cdots f_n(x)+f_1(x)f'_2(x)\cdots f_n(x)+\cdots+f_1(x)f_2(x)\cdots f'_n(x).$$

在上式中,令 $f_1(x)=f_2(x)=\cdots=f_n(x)=f(x)$,则有

$$(f(x)^n)'=n\cdot f(x)^{n-1}\cdot f'(x).\quad\cdots\cdots①$$

关于导数的除法法则,即教材中的公式(9),书中呈现了证明思路,但是,这一证明实际上是在默认极限的四则运算法则与函数 $g(x)$ 连续的前提下得到的. 我们也可以利用导数的乘法法则来给出除法法则的证明,但是要先假设 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 的导函数存在. 设 $h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$,则 $f(x)=g(x)h(x)$. 于是,

$$f'(x)=(g(x)h(x))'=g'(x)h(x)+g(x)h'(x),$$

从而

$$h'(x)=\frac{f'(x)-h(x)g'(x)}{g(x)}=\frac{f'(x)-\dfrac{f(x)}{g(x)}g'(x)}{g(x)}=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2},$$

因此,教材中的公式(9)成立.

由导数的除法法则,我们可推导出正切函数的导数公式:

$$(\tan x)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{(\sin x)'\cos x-(\cos x)'\sin x}{\cos^2 x}$$
$$=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\sec^2 x.$$

由导数的性质与四则运算法则,还可得到 $n(\geqslant 1)$ 次多项式函数 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0(a_n\neq 0)$ 的导数公式:

$$f'(x)=na_nx^{n-1}+(n-1)a_{n-1}x^{n-2}\cdots+\cdots+ka_kx^{k-1}+\cdots+a_1. \qquad ②$$

这说明,n 次多项式函数的导数是一个 $n-1$ 次多项式函数.

对于复合函数的求导法则,教材中只介绍了简单复合函数的导数,并鼓励学生自己来发现复合函数导数的一般规律.实际上,公式①就可以看成是幂函数 $y=u^n$ 与另一函数 $u=f(x)$ 的复合函数的导数公式.

其实,余弦函数的导数公式也可利用正弦函数的导数公式与简单复合函数的求导法则来得到:$y=\cos x$ 可看成是函数 $y=\sin u$ 与 $u=\frac{\pi}{2}-x$ 的复合,于是,

$$(\cos x)'=\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)'$$
$$=(-1)\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=-\sin x.$$

4 关于导数的应用

教材中介绍了如何利用导数来讨论函数的单调性.我们也可利用导数与函数单调性的这种关系,来考虑一般 $n(\geqslant 1)$ 次多项式函数 $y=f(x)$ 的图像特征.由公式②可知,该函数的导函数是一个 $n-1$ 次多项式函数.由代数学基本定理,方程 $f'(x)=0$ 在复数域上恰有 $n-1$ 个复根,当然也至多有 $n-1$ 个实根,因此,函数 $y=f(x)$ 最多有 $n-1$ 个驻点,即极大值点与极小值点的总个数最多为 $n-1$,设这些点为 $x_1<x_2<\cdots<x_k(k\leqslant n-1)$.

现设 n 次多项式 $f(x)$ 的 n 次项系数 $a_n>0$.这时我们来证明:当 x 充分大时,$f'(x)>0$.

设 $f'(x)=b_{n-1}x^{n-1}+b_{n-2}x^{n-2}+\cdots+b_1x+b_0$,则 $b_{n-1}=na_n>0$.当 $x>\max\left\{1,\frac{|b_{n-2}|}{b_{n-1}}+\cdots+\frac{|b_1|}{b_{n-1}}+\frac{|b_0|}{b_{n-1}}\right\}$ 时,

$$f'(x)=b_{n-1}x^{n-2}\left(x+\frac{b_{n-2}}{b_{n-1}}+\cdots+\frac{b_1}{b_{n-1}}\cdot\frac{1}{x^{n-3}}+\frac{b_0}{b_{n-1}}\cdot\frac{1}{x^{n-2}}\right)$$
$$\geqslant b_{n-1}x^{n-2}\left(x-\frac{|b_{n-2}|}{b_{n-1}}-\cdots-\frac{|b_1|}{b_{n-1}}-\frac{|b_0|}{b_{n-1}}\right)$$
$$>0.$$

类似地,还可证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=+\infty$.

接下来证明,当 $x>x_k$ 时,恒有 $f'(x)>0$.

假设存在 $x^*>x_k$,使得 $f'(x^*)<0$.由前面已证,可知存在 $b>x^*$,使 $f'(b)>0$,则由零点定理,存在 $x_{k+1}\in(x^*,b)$,使得 $f'(x_{k+1})=0$,与假设矛盾,即 $y=f(x)$ 在区间 $(x_k,+\infty)$ 上单调增.

如果 n 是偶数,同样可证,当 $x<x_1$ 时,恒有 $f'(x)<0$,即 $y=f(x)$ 在区间 $(-\infty,x_1)$ 上单调减;类似地,如果 n 是奇数,则可证当 $x<x_1$ 时,恒有 $f'(x)>0$,即 $y=f(x)$ 在区间 $(-\infty,x_1)$ 上单调增.

所以,n 次多项式函数 $y=f(x)$ 的图像特点是:当 n 为偶数时,左侧单调减,右侧单调增(即,两头往上延伸),在中间的一个有限长度的区间中至多有 $n-1$ 次上下波动;当 n 为奇数时,两侧均单调增(即,左侧往下延伸,右侧往上延伸),在中间的一个有限长度的区间中至多有 $n-1$ 次上下波动.

当 $a_n<0$ 时,多项式函数的图像特点可类似讨论.

参考文献

[1] 中华人民共和国教育部.普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订)[S].北京:人民教育出版社,2020.

[2] 李大潜,王建磐.普通高中教科书数学(选择性必修第二册)[M].上海:上海教育出版社,2020.