对一道2023年高考抛物线解答题的探究与变式

刘 刚

(北京市第十二中学,100071)

摘 要:由一道高考试题出发,探究了抛物线中一类与焦点有关的面积最值或取值范围问题,解决这类问题时首先要立足图形,分析图形特点,适时运用抛物线的定义进行转化;其次要选好参变量,结合韦达定理、点到直线的距离公式、弦长公式等表示出与面积有关的几何量;最后结合解析式的特点,灵活运用均值不等式、导数、函数的性质、三角函数的有界性等知识处理.

关键词:高考试题;抛物线;焦点;面积最值;取值范围;解题策略

1. 试题呈现

题1 (2023年高考甲卷,理20) 已知直线 $x-2y+1=0$ 与抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 交于 A,B 两点,$|AB|=4\sqrt{15}$.

(1) 求 p;

(2) 设 F 为 C 的焦点,M,N 为 C 上两点,且 $\overrightarrow{FM}\cdot\overrightarrow{FN}=0$,求 $\triangle MFN$ 面积的最小值.

试题考查了抛物线的定义、标准方程、直线与抛物线的位置关系以及三角形面积最值问题,考查了逻辑推理、直观想象等数学核心素养,检验了分析问题与解决问题的能力.试题构思巧妙,解法多样,体现了在知识交汇处命题的特点,符合新课标理念.下面谈一谈试题的解法与变式,供大家参考.

2. 解法探究

(1) 设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,联立 $x-2y+1=0$ 与 $y^2=2px$,得 $y^2-4py+2p=0$,所以 $y_1+y_2=4p$,$y_1y_2=2p$,于是

$$|AB|=\sqrt{(1+\frac{1}{k^2})[(y_1+y_2)^2-4y_1y_2]}$$

$$=\sqrt{5(16p^2-8p)}=4\sqrt{15},$$

所以 $2p^2-p-6=0$,解得 $p=2$.

(2) **解法1** 由(1)知 $F(1,0)$,抛物线 C 的方程为 $y^2=4x$,显然直线 MN 的斜率不可能为零,设直线 MN 的方程为 $x=my+n$,与 $y^2=4x$ 联立,得 $y^2-4my-4n=0$,所以 $\Delta=16m^2+16n>0$,化简得 $m^2+n>0$.

设 $M(x_3,y_3)$,$N(x_4,y_4)$,则 $y_3+y_4=4m$,$y_3y_4=-4n$.

因为 $\overrightarrow{FM}\cdot\overrightarrow{FN}=0$,所以 $(x_3-1)(x_4-1)+y_3y_4=0$,即 $(my_3+n-1)(my_4+n-1)+y_3y_4=0$,于是

$$(m^2+1)y_3y_4+m(n-1)(y_3+y_4)+(n-1)^2=0.$$

将 $y_3+y_4=4m$,$y_3y_4=-4n$ 代入,化简得

$$4m^2=n^2-6n+1.$$

由 $m^2+n>0$,得 $4(m^2+n)=(n-1)^2>0$,所以 $n\neq1$.

由 $4m^2\geqslant0$,得 $n^2-6n+1\geqslant0$,解得 $n\geqslant3+2\sqrt{2}$ 或 $n\leqslant3-2\sqrt{2}$.

由 $\overrightarrow{FM}\cdot\overrightarrow{FN}=0$ 得 $FM\perp FN$,所以 $\triangle MFN$ 的面积

$$S=\frac{1}{2}|FM|\cdot|FN|=\frac{1}{2}(x_3+1)(x_4+1)$$

$$=\frac{1}{2}(my_3+n+1)(my_4+n+1)$$

$$=\frac{1}{2}[m^2y_3y_4+m(n+1)(y_3+y_4)+(n+1)^2]$$

$$=\frac{1}{2}[-4m^2n+4m^2(n+1)+(n+1)^2]$$

$$=\frac{1}{2}[4m^2+(n+1)^2]$$

$$=\frac{1}{2}[n^2-6n+1+(n+1)^2]$$

$$=(n-1)^2,$$

于是,当 $n=3-2\sqrt{2}$ 时,S 有最小值为

本文系北京市教育学会"十四五"教育科研课题《基于直观想象核心素养的教学实践研究——以解析几何为例》(课题编号:FTYB2021-061)阶段成果之一.

$(2-2\sqrt{2})^2=12-8\sqrt{2}$.

故 $\triangle MFN$ 面积的最小值为 $12-8\sqrt{2}$.

点评　先设出直线 MN 的方程 $x=my+n$，然后根据 $\overrightarrow{FM}\cdot\overrightarrow{FN}=0$ 得到了 m、n 的关系式，这为消元以及通过相互制约关系找到各自的取值范围奠定了基础，接下来借助抛物线的定义以及韦达定理得到 $\triangle MFN$ 的面积(也可以借助弦长公式以及点到直线的距离公式表示)，最后根据二次函数的性质求得最值，体现了函数与方程的思想.

解法2　由(1)知 $F(1,0)$，抛物线 C 的方程为 $y^2=4x$，设 $M(\frac{y_3^2}{4},y_3)$，$N(\frac{y_4^2}{4},y_4)$，则

$$\overrightarrow{FM}\cdot\overrightarrow{FN}=(\frac{y_3^2}{4}-1,y_3)\cdot(\frac{y_4^2}{4}-1,y_4)=0,$$

所以 $(y_3y_4)^2+16y_3y_4+16=4(y_3^2+y_4^2)$. ①

因为 $y_3^2+y_4^2\geqslant 2|y_3y_4|$，所以

$(y_3y_4)^2+16y_3y_4+16\geqslant 8|y_3y_4|$. ②

当 $y_3y_4\geqslant 0$ 时，不等式②化简得 $(y_3y_4+4)^2\geqslant 0$，所以 $y_3y_4\geqslant 0$ 时不等式②成立；

当 $y_3y_4<0$ 时，不等式②化简得 $(y_3y_4)^2+24y_3y_4+16\geqslant 0$，解得 $y_3y_4\leqslant -8\sqrt{2}-12$ 或 $8\sqrt{2}-12\leqslant y_3y_4<0$.

综上，y_3y_4 的取值集合是 $(-\infty,-8\sqrt{2}-12]\cup[8\sqrt{2}-12,+\infty)$.

由 $\overrightarrow{FM}\cdot\overrightarrow{FN}=0$ 得 $FM\perp FN$，所以 $\triangle MFN$ 的面积

$$S=\frac{1}{2}|FM|\cdot|FN|=\frac{1}{2}(\frac{y_3^2}{4}+1)(\frac{y_4^2}{4}+1)$$

$$=\frac{1}{32}[(y_3y_4)^2+4(y_3^2+y_4^2)+16]$$

将①代入，得

$$S=\frac{1}{32}[2(y_3y_4)^2+16y_3y_4+32]$$

$$=\frac{1}{16}(y_3y_4+4)^2,$$

所以，当 $y_3y_4=8\sqrt{2}-12$ 时，S 有最小值为 $\frac{1}{16}(8\sqrt{2}-8)^2=12-8\sqrt{2}$.

故 $\triangle MFN$ 面积的最小值为 $12-8\sqrt{2}$.

点评　解法2先借助抛物线的方程表示出点 M，N 的坐标，然后根据 $\overrightarrow{FM}\cdot\overrightarrow{FN}=0$ 得到 y_3，y_4 的关系式，并借助均值不等式得到了 y_3y_4 的取值集合，接下来借助抛物线的定义、二次函数的性质等知识完成解答，体现了均值不等式在解决最值问题时的工具性作用.

解法3　以 F 为极点，射线 Fx 为极轴建立极坐标系，由(1)知 $F(1,0)$，焦点到准线的距离 $p=2$，所以抛物线 C 的极坐标方程为 $\rho=\frac{2}{1-\cos\theta}$. 由 $\overrightarrow{FM}\cdot\overrightarrow{FN}=0$ 得 $FM\perp FN$，不妨设 $M(\rho_1,\theta)(0<\theta\leqslant\pi)$，$N(\rho_2,\theta+\frac{\pi}{2})$，则 $\rho_1=\frac{2}{1-\cos\theta}$，

$$\rho_2=\frac{2}{1-\cos(\theta+\frac{\pi}{2})}=\frac{2}{1+\sin\theta},$$

于是 $\triangle MFN$ 的面积

$$S=\frac{1}{2}\rho_1\rho_2=\frac{2}{(1-\cos\theta)(1+\sin\theta)}$$

$$=\frac{2}{1+\sin\theta-\cos\theta-\sin\theta\cos\theta}.$$

设 $\sin\theta-\cos\theta=t$，则 $t=\sqrt{2}\sin(\theta-\frac{\pi}{4})$，$t\in(-1,\sqrt{2}]$，$\sin\theta\cos\theta=\frac{1-t^2}{2}$，所以

$$S=\frac{2}{1+t-\frac{1-t^2}{2}}=\frac{4}{(t+1)^2},$$

于是，当 $t=\sqrt{2}$ 时，S 有最小值为 $\frac{4}{(\sqrt{2}+1)^2}=12-8\sqrt{2}$.

故 $\triangle MFN$ 面积的最小值为 $12-8\sqrt{2}$.

点评　由于 FM，FN 是两条互相垂直的焦半径，因此解法3联想抛物线的极坐标方程处理，最后借助三角公式以及三角函数的有界性完成解答，培养了学生多角度解决问题的能力.

3. 变式

为了帮助学生进一步认识此类问题的特点，积累解题经验，提高复习备考的针对性，下面给出一些变式题.

题2　已知抛物线 $C:y^2=4x$ 的焦点为 F，准线与 x 轴交于点 P，过点 P 的直线 l 与抛物线 C 交于 A，B 两点(点 A 在点 P，B 之间)，点 Q 满足 $\overrightarrow{QA}=3\overrightarrow{AF}$，记 $\triangle ABF$，$\triangle APQ$ 的面积分别为 S_1，S_2，求 S_1+S_2 的最小值.

解　如图1，由已知得 $P(-1,0)$，$F(1,0)$，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，直线 AB 的方程为 $x=ty-1$，与 $y^2=4x$ 联立，得 $y^2-4ty+4=0$，则 $y_1+y_2=4t$，$y_1y_2=4$，$\Delta=16t^2-16>0$，解得 $t<-1$ 或 $t>1$.

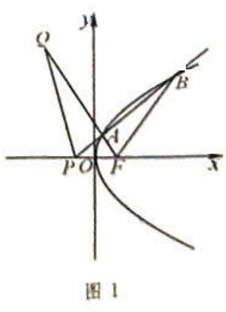

图 1

因为$\overrightarrow{QA}=3\overrightarrow{AF}$,所以$y_1-y_Q=3(-y_1)$,即$y_Q=4y_1$,于是

$$S_1+S_2=S_{\triangle PFQ}+S_{\triangle PFB}-2S_{\triangle PFA}$$
$$=|y_Q|+|y_2|-2|y_1|=2|y_1|+|y_2|$$
$$\geqslant 2\sqrt{2|y_1y_2|}=4\sqrt{2},$$

当且仅当$y_2=2y_1$,即$\begin{cases}y_1=\sqrt{2},\\y_2=2\sqrt{2}\end{cases}$或$\begin{cases}y_1=-\sqrt{2},\\y_2=-2\sqrt{2}\end{cases}$时等号成立.

故S_1+S_2的最小值为$4\sqrt{2}$.

点评　设出A,B两点坐标,根据已知条件得到点Q的坐标,接下来根据图形特点发现PF长度不变,因此表示出$\triangle PFQ,\triangle PFB,\triangle PFA$的面积,由此得到$S_1+S_2$,最后根据均值不等式完成解答,体现了数形结合思想.

题3　已知抛物线$C:y^2=4x$的焦点为F,设Q为抛物线C的准线上一点,过点F且垂直于OQ的直线与抛物线C交于A,B两点,记$\triangle QAB,\triangle OAB$的面积分别为$S_1,S_2$,求$\frac{1}{S_2}-\frac{1}{S_1}$的最大值.

解　由已知得$F(1,0)$,抛物线C的准线方程为$x=-1$,设$Q(-1,t)$,则$k_{OQ}=-t$,所以直线AB的方程为$x=ty+1$,与$y^2=4x$联立,得$y^2-4ty-4=0$.设$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$,则$y_1+y_2=4t,y_1y_2=-4$,于是

$$|AB|=|AF|+|BF|=(x_1+1)+(x_2+1)$$
$$=t(y_1+y_2)+4=4t^2+4.$$

又点Q到直线AB的距离$d=\frac{t^2+2}{\sqrt{t^2+1}}$,所以

$$S_1=\frac{1}{2}|AB|d=2(t^2+2)\sqrt{t^2+1}.$$

而$S_2=\frac{1}{2}|OF|\cdot|y_1-y_2|$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=2\sqrt{t^2+1},$$

所以

$$\frac{1}{S_2}-\frac{1}{S_1}=\frac{\sqrt{t^2+1}}{2(t^2+2)}=\frac{\sqrt{t^2+1}}{2[(t^2+1)+1]}$$
$$=\frac{1}{2\left(\sqrt{t^2+1}+\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\right)}\leqslant\frac{1}{4},$$

当且仅当$t=0$时等号成立,故$\frac{1}{S_2}-\frac{1}{S_1}$的最大值为$\frac{1}{4}$.

点评　先设出点$Q(-1,t)$,然后以t为参变量,借助抛物线的定义、点到直线的距离公式、韦达定理等知识得到$\frac{1}{S_2}-\frac{1}{S_1}=\frac{\sqrt{t^2+1}}{2(t^2+2)}$,最后借助均值不等式将问题化解,体现了函数思想.

题4　已知抛物线$C:y^2=4x$的焦点为F,过F作两条互相垂直的直线l_1,l_2,直线l_1与C交于A,B两点,直线l_2与C交于D,E两点,求四边形$ADBE$面积的最小值.

解法1　由已知得$F(1,0)$,直线l_1,l_2的斜率都存在且均不为0.设$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$,l_1的方程为$y=k(x-1)$,与抛物线C的方程$y^2=4x$联立,得$k^2x^2-(2k^2+4)x+k^2=0$,所以$x_1+x_2=2+\frac{4}{k^2},x_1x_2=1$,所以

$$|AB|=|AF|+|BF|=(x_1+1)+(x_2+1)$$
$$=x_1+x_2+2=2+\frac{4}{k^2}+2=\frac{4(1+k^2)}{k^2}.$$

因为l_1,l_2互相垂直,所以把k换成$-\frac{1}{k}$,得$|DE|=4(1+k^2)$,所以四边形$ADBE$的面积

$$S=\frac{1}{2}|AB|\cdot|DE|=\frac{8(1+k^2)^2}{k^2}$$
$$=8\left(k^2+\frac{1}{k^2}+2\right)\geqslant 8(2+2)=32,$$

当且仅当$k^2=\frac{1}{k^2}$,即$k=\pm1$时等号成立.

故四边形$ADBE$面积的最小值为32.

解法2　以F为极点,射线Fx为极轴建立极坐标系,则抛物线C的极坐标方程为$\rho=\frac{2}{1-\cos\theta}$.

不妨设$A(\rho_1,\theta)(0<\theta\leqslant\pi),B(\rho_2,\theta+\pi)$,则

$$|AB|=\rho_1+\rho_2=\frac{2}{1-\cos\theta}+\frac{2}{1-\cos(\theta+\pi)}$$
$$=\frac{4}{\sin^2\theta}.$$

因为l_1,l_2互相垂直,所以把θ换成$\theta+\frac{\pi}{2}$,得

$$|DE|=\frac{4}{\sin^2(\theta+\frac{\pi}{2})}=\frac{4}{\cos^2\theta},$$

于是四边形$ADBE$的面积

$$S=\frac{1}{2}|AB|\cdot|DE|=\frac{8}{\sin^2\theta\cos^2\theta}=\frac{32}{\sin^2 2\theta},$$

所以,当$\theta=\frac{\pi}{4}$或$\theta=\frac{3\pi}{4}$时,S有最小值为32.

故四边形$ADBE$面积的最小值为32.

点评　解法1先设出直线l_1的方程,然后借助

韦达定理、抛物线的定义等知识得到 AB 的长，接下来根据 l_1,l_2 互相垂直，把 k 换成 $-\frac{1}{k}$，得到 DE 的长，从而表示出四边形 $ADBE$ 的面积，最后借助均值不等式处理；解法2借助抛物线的极坐标方程并运用三角函数的有界性等知识解答. 两种方法各有特点，培养了思维的发散性.

题5 (2019年高考浙江卷21题)如图2，已知点 $F(1,0)$ 为抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点，过点 F 的直线交抛物线于 A、B 两点，点 C 在抛物线上，使得 $\triangle ABC$ 的重心 G 在 x 轴上，直线 AC 交 x 轴于点 Q，且 Q 在点 F 的右侧. 记 $\triangle AFG$，$\triangle CQG$ 的面积为 S_1,S_2.

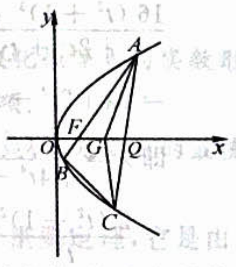

图2

(1) 求 p 的值及抛物线的准线方程；

(2) 求 $\frac{S_1}{S_2}$ 的最小值及此时点 G 的坐标.

解 (1) $p=2$，抛物线的准线方程为 $x=-1$，过程略.

(2) 由(1)知抛物线的方程为 $y^2=4x$，设 $A(x_A,y_A)$，$B(x_B,y_B)$，$C(x_C,y_C)$，重心 $G(x_G,y_G)$.

令 $y_A=2t(t\neq 0)$，则 $x_A=t^2$. 因为直线 AB 过焦点 F，所以直线 AB 的方程为 $x=\frac{t^2-1}{2t}y+1$，代入 $y^2=4x$，得 $y^2-\frac{2(t^2-1)}{t}y-4=0$，所以 $2ty_B=-4$，即 $y_B=-\frac{2}{t}$，所以 $B(\frac{1}{t^2},-\frac{2}{t})$.

又 $x_G=\frac{1}{3}(x_A+x_B+x_C)$，$y_G=\frac{1}{3}(y_A+y_B+y_C)$，重心 G 在 x 轴上，所以 $2t-\frac{2}{t}+y_C=0$，即 $C((\frac{1}{t}-t)^2,\frac{2}{t}-2t)$，$G(\frac{2t^4-2t^2+2}{3t^2},0)$，于是直线 AC 的方程为 $y-2t=2t(x-t^2)$，由此得 $Q(t^2-1,0)$.

因为点 Q 在焦点 F 的右侧，所以 $t^2>2$. 又

$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{\frac{1}{2}|FG|\cdot|y_A|}{\frac{1}{2}|QG|\cdot|y_C|}$$

$$=\frac{\left|\frac{2t^4-2t^2+2}{3t^2}-1\right|\cdot|2t|}{\left|t^2-1-\frac{2t^4-2t^2+2}{3t^2}\right|\cdot\left|\frac{2}{t}-2t\right|}$$

$$=\frac{2t^4-t^2}{t^4-1}=2-\frac{t^2-2}{t^4-1}.$$

令 $m=t^2-2$，则 $m>0$，所以

$$\frac{S_1}{S_2}=2-\frac{m}{m^2+4m+3}=2-\frac{1}{m+\frac{3}{m}+4}$$

$$\geqslant 2-\frac{1}{2\sqrt{m\cdot\frac{3}{m}}+4}=1+\frac{\sqrt{3}}{2},$$

当且仅当 $m=\sqrt{3}$ 时，$\frac{S_1}{S_2}$ 有最小值为 $1+\frac{\sqrt{3}}{2}$，此时 $G(2,0)$.

点评 借助抛物线的方程先设出点 A 的坐标为 $(t^2,2t)$，并以 t 为研究对象，接下来借助韦达定理、重心位置及其坐标公式表示出点 C,G 的坐标，然后求得点 Q 的坐标并表示出 S_1,S_2，最后借助均值不等式求得最值，体现了坐标法的应用，检验了直观想象与数学运算等核心素养.

题6 已知 $O(0,0)$，$E(-1,0)$，$F(1,0)$，圆 $C_1:x^2+y^2=4$，抛物线 $C_2:y^2=4x$，过 F 的直线与抛物线 C_2 交于 A,B 两点，直线 AE 与圆 C_1 交于 M,N 两点，记 $\triangle AOB$，$\triangle MON$ 的面积分别为 S_1,S_2，求 S_1S_2 的取值范围.

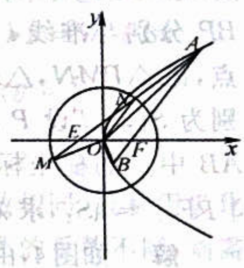

图3

解 如图3，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，直线 AB 的方程为 $x=my+1$，与 $y^2=4x$ 联立，得 $y^2-4my-4=0$，则 $y_1+y_2=4m$，$y_1y_2=-4$，所以

$$S_1=\frac{1}{2}|OF|\cdot|y_1-y_2|$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=2\sqrt{m^2+1}.$$

设直线 AE 的方程为 $x=ny-1$，即 $x-ny+1=0$，则原点 O 到直线 AE 的距离 $d=\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$，所以

$$|MN|=2\sqrt{4-d^2}=2\sqrt{\frac{4n^2+3}{n^2+1}},$$

于是 $S_2=\frac{1}{2}|MN|d=\frac{\sqrt{4n^2+3}}{n^2+1}$.

联立直线 AB 的方程 $x=my+1$ 与直线 AE 的方程 $x=ny-1$，解得 $x_1=\frac{n+m}{n-m}$，$y_1=\frac{2}{n-m}$，所以 $(\frac{2}{n-m})^2=4\times\frac{n+m}{n-m}$，则 $n^2-m^2=1$，$n^2\geqslant 1$，所以

$$S_1S_2=2\sqrt{n^2}\cdot\sqrt{\frac{4n^2+3}{(n^2+1)^2}}$$

$$=2\sqrt{\frac{n^2(4n^2+3)}{(n^2+1)^2}}.$$

令 $n^2+1=t,t\geqslant 2$,则 $0<\frac{1}{t}\leqslant\frac{1}{2}$,所以

$$S_1S_2=2\sqrt{\frac{1}{t^2}-\frac{5}{t}+4}\in[\sqrt{7},4).$$

故 S_1S_2 的取值范围为 $[\sqrt{7},4)$.

点评　先设出直线 AB、AE 的方程分别为 $x=my+1,x=ny-1$,然后表示出 S_1S_2,接下来通过联立直线的方程得到点 A 的坐标,并代入抛物线方程,找出 m,n 的关系进行解答,体现了消元与换元思想在解题中的应用.

题 7　已知抛物线 $C:y^2=4x$ 的焦点为 F,准线为 l,P 是抛物线 C 上一点,过 F 的直线与抛物线 C 交于 A,B 两点,直线 AP,BP 分别与准线 l 交于 M,N 两点,记 $\triangle PMN$,$\triangle PAB$ 的面积分别为 S_1,S_2. 设 P 点的横坐标与 AB 中点的横坐标相等,且 $S_1\cdot|PF|=\lambda S_2$,求 λ 的最小值.

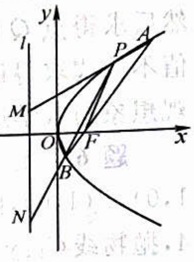

图 4

解　如图 4,由已知得 $F(1,0)$,准线 l 的方程为 $x=-1$,设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),P(x_0,y_0)$,直线 AB 的方程为 $x=ty+1(t\neq 0)$,与 $y^2=4x$ 联立,得 $y^2-4ty-4=0$,则 $y_1+y_2=4t,y_1y_2=-4$,于是

$$x_0=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{t(y_1+y_2)+2}{2}=2t^2+1,$$

$$y_0^2=4x_0=8t^2+4.$$

因为 $k_{AP}=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}=\frac{4}{y_1+y_0}$,所以直线 AP 的方程为 $y-y_0=\frac{4}{y_1+y_0}(x-x_0)$,令 $x=-1$,得

$$y_M=y_0-\frac{4(x_0+1)}{y_1+y_0}.$$

同理,得 $y_N=y_0-\frac{4(x_0+1)}{y_2+y_0}$,所以

$$S_1=\frac{1}{2}|MN|\cdot|x_0+1|$$

$$=2(x_0+1)^2\cdot\left|\frac{1}{y_1+y_0}-\frac{1}{y_2+y_0}\right|$$

$$=\frac{2(x_0+1)^2\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}}{|y_1y_2+y_0(y_1+y_2)+y_0{}^2|}$$

$$=\frac{8(t^2+1)^2\sqrt{t^2+1}}{|2t^2+ty_0|}.$$

又 $|AB|=|AF|+|BF|=(x_1+1)+(x_2+1)=t(y_1+y_2)+4=4t^2+4$,点 P 到直线 AB 的距离

$$d=\frac{|x_0-ty_0-1|}{\sqrt{t^2+1}}=\frac{|2t^2-ty_0|}{\sqrt{t^2+1}},$$

所以 $S_2=\frac{1}{2}|AB|d=2|2t^2-ty_0|\sqrt{t^2+1}$.

又 $|PF|=x_0+1=2(t^2+1)$,$S_1\cdot|PF|=\lambda S_2$,所以

$$\frac{16(t^2+1)^3\sqrt{t^2+1}}{|2t^2+ty_0|}$$

$$=2\lambda|2t^2-ty_0|\sqrt{t^2+1},$$

即 $\lambda=\frac{8(t^2+1)^3}{|4t^4-t^2y_0^2|}=\frac{8(t^2+1)^3}{|4t^4-t^2(8t^2+4)|}$

$$=\frac{2(t^2+1)^2}{t^2}=2(t^2+\frac{1}{t^2}+2)$$

$$\geqslant 2(2+2)=8,$$

当且仅当 $t=\pm 1$ 时等号成立.

故 λ 的最小值为 8.

点评　先设出直线 AB 的方程 $x=ty+1$ 以及点 P 的坐标,以 t 为参变量,借助韦达定理、点到直线的距离公式、抛物线的定义等知识得到 $\lambda=\frac{2(t^2+1)^2}{t^2}$,最后借助均值不等式完成解答,培养了逻辑推理、数学运算等数学素养.

以上由一道高考试题出发,探究了抛物线中一类与焦点有关的面积最值或取值范围问题,解决这类问题时首先要立足图形,分析图形特点,适时运用抛物线的定义进行转化;其次要选好参变量(如直线的斜率、截距、动点的坐标等),结合韦达定理、点到直线的距离公式、弦长公式等表示出与面积有关的几何量;最后结合解析式的特点,灵活运用均值不等式、导数、函数的性质、三角函数的有界性等知识处理. 在教学中,教师应引导学生落实基础知识与基本方法,学会从不同角度分析和解决问题,多积累解题经验,这样才会提高复习效率.

参考文献:

[1] 赵毅. 例谈抛物线与圆中的面积最值问题[J]. 数学通讯,2023(13):18-21.

[2] 刘刚. 一道 2019 年高考抛物线最值题的探究与变式[J]. 数学通讯,2020(05):43-46.

[3] 刘刚. 抛物线定义的精彩应用[J]. 数学教学,2019(7):27-31.

[4] 刘刚,赵毅. 一道 2017 年高考抛物线试题的探究与拓展[J]. 数学通讯,2018(3):33-36.

(收稿日期:2023-10-20)