

# 大单元整体学习下的

## 高中数学单元小结课设计示例

### ——以“空间直线、平面的垂直”为例

孙媛媛(华中师范大学人工智能教育学部)

刘峥嵘(岭南师范学院附属中学)

易宝林(华中师范大学人工智能教育学部)

**摘要:**单元小结课是大单元整体学习的关键环节之一,是促进学科核心素养落地的主阵地。学生经历“情境引入—整体感知—探究构建”来梳理知识脉络,构建整体知识结构;通过“寻根探源—应用迁移”拓展知识的广度和深度,达到融会贯通的效果;通过“总结回顾—深化认识”实现重构拓展,让知识、思想方法、育人价值成为认知结构的组成部分。

**关键词:**大单元整体学习;单元小结课

**文章编号:**1002-2171(2024)1-0036-04

## 1 引言

《普通高中数学课程标准(2017年版2020年修订)》在“实施建议”中指出:教师要以数学学科核心素养为导向,引导学生从整体上把握课程,实现学生数学学科核心素养的形成和发展。重视以学科大概念为核心,使课程内容结构化,以主题为引领,使课程内容情境化,促进学科核心素养的落实<sup>[1]</sup>。强调学生应从整体上认知学科知识与逻辑、结构与本质、应用与生成、价值与意义等,对课堂教学提出了新的更高的要求。如何规避传统教学重分数、教学过程碎片化、知识学习重记忆、教学方式重传授等弊端呢?课时教学走向大单元整体学习成为一种必然趋势。大单元整体学习里的“大”不一定是代表知识多,可以是深度、广度。“大单元”不仅仅是内容的单元,更是学习单元、课程单元。“整体”可以是学习情境任务的整体性、学习过程的整体性等。而“学习”强调以学生为中心,以设计学生的学为重点。大单元整体学习就是培养学生思维能力的整体认知过程,实现学生数学思维由低阶向高阶发展,帮助学生形成数学高阶思维品质,彰显数学学科的育人价值。

单元小结课是高中数学教学的重要课型之一,能够帮助学生拓展知识结构的广度和深度,是培养学生高阶思维、发展学生核心素养的重要载体。徐章韬认为,单元小结课的功能首先是要梳理作为认识结果的

知识,把它们编织成一个整体,目标指向是塑造学生整体认知结构;其次,从不同角度认识作为认识成果的知识,目标指向是培养学生的理性批判、反思等独立个性;再次,深化作为认识过程的方法,把它们形成一个系统,目标指向是培养学生的探索发现精神;最后,挖掘作为认识源头动力的精神力量,目标指向是数学的内在力量,体现数学科学的教育性<sup>[2]</sup>。

笔者以人教A版《数学》(必修第二册)第八章“立体几何初步”中的“8.6 空间直线、平面的垂直”为例,探讨如何立足大单元整体学习理念,进行高中数学单元小结课学习。

## 2 课前分析

### 2.1 课标分析

空间几何体是几何学的重要组成部分,是考查空间想象能力的重要载体。立体几何初步侧重从空间几何体的整体观察入手,研究空间几何体的结构特征和直观图,了解一些简单几何体的表面积与体积的计算方法。在整体认识空间几何体的基础上,以长方体模型为基本载体,研究空间点、直线、平面的位置关系,尤其是平行和垂直的判定与性质。

空间几何体的基本问题围绕定义和关系两方面展开。不同角度定义图形,在相关问题解决研究中对应的数学思想方法不同。例如,对直线来说,从几何角度可以描述为“两点确定一条直线”;解析几何角度

可以描述为“平面直角坐标系中,每个二元一次方程表示一条直线”;向量角度可以描述为“给定一个点和一个非零向量,可以唯一确定过此点与向量平行的直线”。在研究图形的位置关系和度量关系时,例如,直线、平面之间位置关系——平行、垂直等;度量关系——距离、角度、面积、体积等。根据不同的定义角度研究这些问题的主要思想方法不同,例如,综合几何法、解析几何法、向量法等。其中,向量是联系代数与几何的天然桥梁,向量系和复数系又推广和扩充了实数系。所以,在高中数学必修课程中,平面向量及复数作为研究几何问题的重要工具,与立体几何初步一章被放在几何与代数主题,使直观想象与数学运算自然地有机融合。

## 2.2 教材分析

喻平教授提出:对教材的分析,主要指对章、节、单元的知识内容和核心素养成分作解析。知识内容分为显性知识和隐性知识;核心素养成分,指通过本章、节、单元知识的学习,能够培养学生的哪些数学核心素养<sup>[3]</sup>。

立体几何初步所涉及的显性知识,如图1。

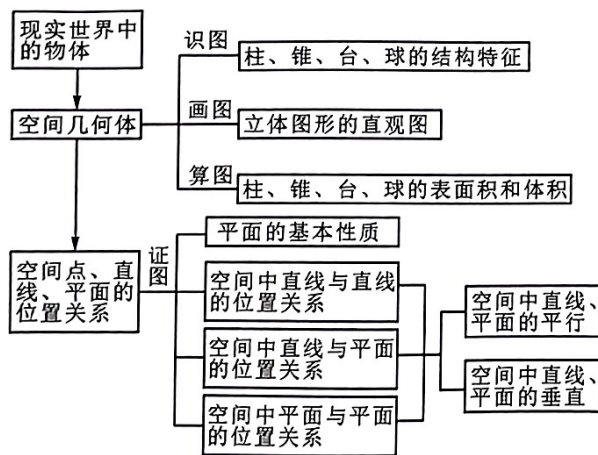


图1

隐形知识,重视数学文化的文化元素和数学思想方法引导。新教材中本章在《阅读与思考》栏目中提及“画法几何与蒙日”和“欧几里得《原本》与公理化方法”;在探究与发现中介绍“祖暅原理与柱体、锥体的体积”;在文献阅读与数学写作中给出“几何学的发展”这一主题,这些内容体现了数学文化的文化元素。让学生看到数学在推动人类社会文明的进程中所发挥的作用。解决空间图形问题的重要思想方法是空间问题平面化。除了转化思想,数形结合思想也是研究立体几何的重要数学思想方法,把抽象的数学语言与直观的图形结合起来,实现代数问题与几何图形之间的相互转化。在整个学习过程中,学生的直观想

象、逻辑推理、数学运算和数学抽象等素养得到发展,创新思维水平得到提升。

## 2.3 教学内容分析

立体几何初步中“空间直线、平面的垂直”编写内容,无论是在知识的呈现,还是在知识结构与思想方法等方面,与“空间直线、平面的平行”具有高度的相似性。从内容的呈现方式看,都是按“定义—判定—性质”展开;从知识结构看,都是先讨论线线关系,再讨论线面关系,最后讨论面面关系;从思想方法看,两者都强调线线垂直(平行)、线面垂直(平行)、面面垂直(平行)之间的相互转化;从认知方式看,都是按照直观感知、操作确认、思辨论证、运用巩固的方式进行;从知识的教育价值看,都有助于学生更好地认识直线与平面的位置关系,发展学生的空间想象能力和思维能力。

## 2.4 学情分析

已有经验:知识经验方面,学生能够通过直观图理解空间图形,能够运用图形的概念描述图形的基本关系和基本结果,会进行简单应用。生活经验方面,学生在生活中接触过很多平行、垂直的实例。策略经验方面,学生具备初步的化空间问题为平面问题,化线面问题为线线问题、以简驭繁等思想方法。

认知障碍:对空间垂直关系的深度关联和迁移。

认知特点:学生对空间中的线线垂直、线面垂直、面面垂直的感知,在头脑中已经形成,具有一定的空间想象能力;有一定的自主学习与合作学习能力。

个性差异:学生的几何直观和逻辑推理能力存在差异,在完善知识结构、获得各种智慧技能时要进行针对性指导。

## 2.5 教学目标分析

经历从具体问题出发把线线垂直、线面垂直、面面垂直等贯穿起来的过程,理解空间垂直关系的知识结构,掌握空间垂直关系的判定方法,发展学生的直观想象、逻辑推理、数学抽象和数学运算等素养。

## 3 教学过程

### 3.1 梳理知识

#### 3.1.1 情境引入

问题1 如图2,请大家回顾空间中的垂直关系主要有哪些?教材中如何定义?

设计意图:真实情境引入,通过直观感知引导学生从自

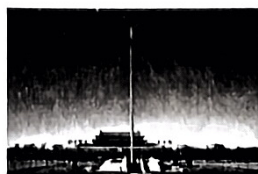


图2

然语言、图形语言和符号语言三个方面回顾、梳理、对比已学过的垂直关系,加深对垂直关系的理解。

3.1.2 整体感知

问题2 已知四面体PABC可能有:①PA⊥AB, ②PA⊥AC, ③AC⊥BC, ④PA⊥平面ABC, ⑤BC⊥平面PAC, ⑥平面PAC⊥平面ABC。

如图3,请用以上的一个或多个做条件,一个做结论,直接体现线面垂直判定定理、面面垂直判定定理、面面垂直性质定理的主要内容,并用文字语言表达该定理内容。

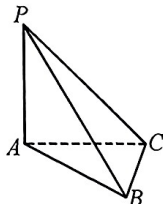


图3

设计意图:紧抓核心概念,通过结构不良问题,激发学生的学习兴趣,调动原有认知,引发深度思考,积极寻求解决策略。

3.1.3 探究建构

结合问题2,尝试让学生对空间中的垂直关系进行梳理,画出垂直关系图。教师通过巡视课堂,对比较有价值的关系图,并进行展示,如图4。

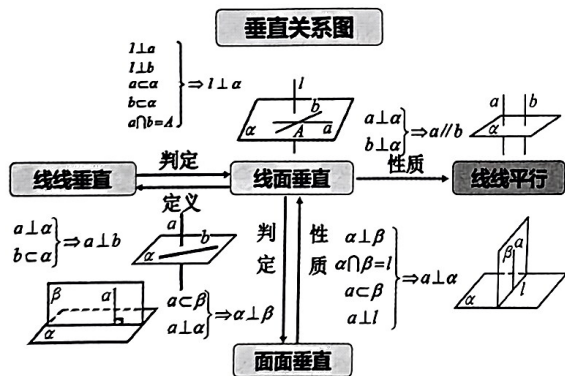


图4

设计意图:在有限的时间内,用一条主线把线线垂直、线面垂直、面面垂直的定义、判定定理、性质定理等知识贯通起来,这对学生来说具有一定难度。学生作出来的垂直关系图可能不尽相同,但彼此之间通过互相学习、借鉴、完善,让自己的知识脉络清晰化,实现垂直关系的知识结构可视化,建立合理的知识体系,深化其对垂直关系本质的认识和理解,从而提升数学综合能力。

3.2 融会贯通

3.2.1 寻根探源

例1 在《九章算术》中,将四个面都为直角三角形的四面体称之为鳖臑。在四面体PABC中(图5),若PA⊥平面ABC,AC⊥BC,则

(I)请判断四面体PABC是否为鳖臑?若是,

写出其每个面的直角(只需写出结论)。

(II)过A作AE⊥PC,垂足为E(图6),求证:AE⊥平面PBC。

(III)在问题(II)的条件下,过A作AF⊥PB,垂足为F(图7),求证:平面AEF⊥平面PAB;

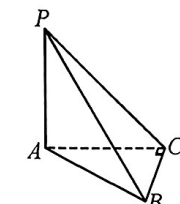


图5

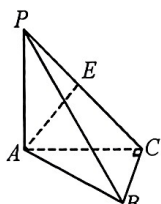


图6

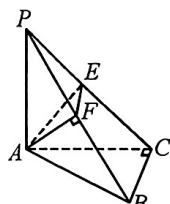


图7

(IV)在问题(III)的条件下作出的四面体PAEF是否为鳖臑?

设计意图:深挖问题2的文化背景,寻根探源。环环相扣的数学问题链设计,让学生体会思维的梯度性,同时在问题解决过程中注意引导其多题一解和一题多解,在求同与求变思维中让学生实现知识技能化。《九章算术》是数学文化瑰宝,以它为文化底蕴的立体几何试题层出不穷,为我们的数学认知拓展眼界,同时增强文化自信。

3.2.2 应用迁移

变式1:如图8,在四棱锥P-ABCD中,底面ABCD为菱形,平面PAD⊥底面ABCD,PA=AD=2,PD=2√2。在PC上找一点M,思考:当点M满足什么条件时,平面MBD⊥平面PCD。

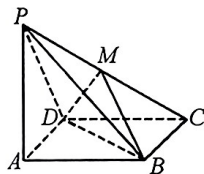


图8

设计意图:在例1图形的基础上,增加图形的复杂程度,让学生的思维层级螺旋递进,拓展知识结构的深度和广度。

变式2:如图9,四棱锥P-ABCD的底面为正方形,PD⊥底面ABCD。设平面PAD与平面PBC的交线为l。证明:直线l⊥平面PDC。

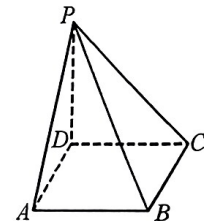


图9

设计意图:图形具有直观性,可以降低想象难度。本题面与面的交线很难画出,学生无法直观感知,如何来证明线面垂直呢?引出了学习立体几何的主旋律——转化,转化既有位置关系的转化,也有空间问题降维成平面问题的转化。当把不能在图形中找到的交线利用性质定理转化成相互平行的已知直线,再去证明线面垂直就水到渠成了。

延伸拓展:《九章算术》里这样描述,“斜解立方,得两堑堵。斜解堑堵,其一为阳马,一为鳖臑。阳马居二,鳖臑居一,不易之率也。”阳马和鳖臑是我国古代对一些特殊几何体的称谓,取一个长方体,沿它的一个对角面一剖为二,如图 10,得到两个一模一样的三棱柱,称为堑堵。再沿堑堵的一个顶点与其对棱所构成的平面剖开,如图 11,得到一个四棱锥和一个三棱锥。以矩形为底,并有一棱与底面垂直的四棱锥,称为阳马。余下的三棱锥四个面都是直角三角形,称为鳖臑。

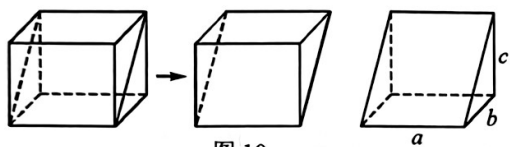


图 10

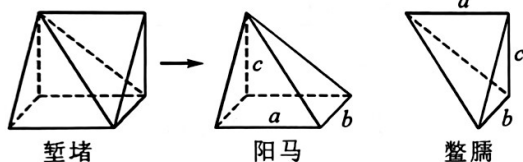


图 11

设计意图:把知识转化为自己的认知过程,立足立德树人和文化育人的基本理念,在追求思维价值的同时,渗透数学文化,领略数学文化的魅力与价值,又在问题的解答过程中体会、领悟、欣赏数学之美。

变式 3:如图 12,已知  $A, B, C, D$  为球  $O$  面上的点,  $DA \perp$  平面  $ABC, AB \perp BC, DA = AB = BC = \sqrt{3}$ , 则球  $O$  的体积为\_\_\_\_\_。

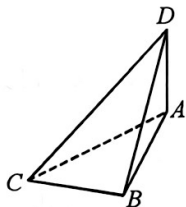


图 12

设计意图:考查高一立体几何初步的知识点,主要是以长方体为载体认识和探索空间图形的性质,遵循从整体到局部的原则。本题的关键是还原图形,从局部到整体,轻松解决问题,培养学生的探索发现精神。

### 3.3 重构拓展

#### 3.3.1 总结回顾

鼓励学生总结判断垂直关系的基本思想和方法。和学生一起完善垂直关系图(图 4),把初中平面图形所涉及的垂直关系进阶到高中所学的垂直关系中,找到知识的生长点。

设计意图:把碎片化的知识进行整合,使学生对空间中直线、平面垂直的认知上升到一个新的高度,并感受知识的内在张力。

#### 3.3.2 深化认识

课后作业:如图 13,在四棱锥  $P-ABCD$  中,  $PD \perp$  底面  $ABCD, CD \parallel AB, AD = DC = CB = 1, AB = 2, DP = \sqrt{3}$ 。

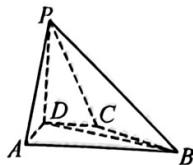


图 13

(I)证明:  $BD \perp PA$ ;

(II)求  $PD$  与平面  $PAB$  所成角的正弦值。

设计意图:对课后题目再次进行简单变式,与所学知识紧密联系,又略有不同,适合学生进行独立思考。第(I)问为必做题,第(II)问为选做题,对不同的学生提出不同的作业要求,也为后续的单元学习做好铺垫。

### 4 教学思考

大单元整体学习突出体现“整体设计、整体呈现、整体学习”的特点,培养学生整体认知能力。在大单元整体学习理念下,如何更好地进行单元小结教学,笔者认为应该做到以下几点。

#### 4.1 思维的清晰性

碎片化的知识很难内化,所以强调知识整体化、结构化。可以从核心知识点或核心概念出发,寻找一条主线把知识贯穿起来,准确把握知识生长结点,形成可视化的知识结构图,从而使学生的思维更清晰。

#### 4.2 思维的深刻性与灵活性

培养学生高阶思维要突出问题导向,需要设计学生感兴趣、富有探究价值、与核心重点关联性的问题串。通过问题的不断变化和深入,拓展知识的广度和深度,即用联系的观点和变化的思想体现思维的深刻性和灵活性。

#### 4.3 思维的自觉性——化知识为见识

单元小结课为知识与经验的转化、方法策略的理解与整合提供了条件,对学生的思维与探究能力提出了更高层次的要求。学生在相互交流形成的整体认知结构中,所涉及的思想、方法、思维、价值意义最终要回到新的情境中解决实际问题,而这样的过程也会使其对学科核心知识有更深刻的理解,从而在总结反思与再认识的过程中提升数学思维能力。

#### 参考文献:

- [1] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017年版 2020年修订)[M]. 北京:人民教育出版社, 2020.
- [2] 徐章韬. 数学单元小结课的认识及其教学设计[J]. 课程·教材·教法, 2016(12): 61-65.
- [3] 喻平. 发展学生数学核心素养的教学与评价研究[M]. 上海:华东师范大学出版社, 2021.