# 谈人文精神在高中数学教学中的渗透*

贺丽珍 (北京市一〇一中学 100086)

**摘 要** 首先探讨人文精神的内涵,阐述在数学教学中培养人文精神的必要性,真正把数学的学术形态转化为教育形态,促进学生全面发展,提升人文精神.然后结合笔者在教学中的几个案例,探讨在数学教学中培养人文精神的方法:一是在教学中用好数学史,渗透数学文化;二是数学概念公式的人文解读与引申;三是数学问题的人文解读与深入探究.最后指出,只有坚持在数学教学中培养人文精神,数学教育才可在每一个人身上有更多的沉淀和积累,并作为个人的文化底蕴中一块不可缺少的基石,伴随他的一生.

**关键词** 人文精神;高中数学;数学文化

**文章编号** 1004-1176(2023)03-0020-05

人文精神是一种普遍的人类自我关怀,表现为对人的尊严、价值、命运的维护、追求和关切,对人类遗留下来的各种精神文化现象的高度珍视,对一种全面发展的理想人格的肯定和塑造.人文精神的内涵主要体现为科学精神、自由与民主精神、批判与包容精神、创新精神和道德素养.在中学阶段培养学生的人文精神,不仅是学习知识,更为重要的是合理运用所学知识,对自身行为价值进行判断.数学既是应用工具,具有实用价值,更是一种文化,蕴含着人类智慧的结晶,具有很好的人文价值.

具有数学特质的人文精神,具体体现为数学的思维方式、精神能使学生养成求真、诚信的科学态度,有助于培养学生一丝不苟的工作态度、敬业精神和建立诚信社会的使命感;数学的学习过程使学生懂得只有通过不懈的努力,才能领略到科学的真谛,逐步形成不畏艰难、锲而不舍、勇攀高峰的意志品质;高中数学的学习过程实质上是再创造的过程,数学中对定义、定理以及解题方法、证明方法的探索都需要学生具有创新思维和开拓精神;数学学习有助于提高和发展学生的辩证思维能力,形成运动、转化、联系的意识,较自然地培养其辩证唯物主义的世界观;数学中蕴含的美使学生丰富联想、愉悦情操、提高兴趣,促进其创造性思维.

《普通高中数学课程标准(2020 年修订版)》中提出要“不断引导学生感悟数学的科学价值、应用价值、文化价值和审美价值”[1]2,并指出:数学文化是指数学的思想、精神、语言、方法、观点,以及它们的形成和发展;还包括数学在人类生活、科学技术、社会发展中的贡献和意义,以及与数学相关的人文活动[1]10.教师在高中数学教学过程中不仅要以传授数学理论知识为主,而且需要重视学生的人文精神培育,为高中生的数学科学精神奠定良好基础.数学教学中综合建构学生的智能结构、意志结构和情感结构,抽象、简洁、纯粹的数学知识和思想方法,会折射出丰富多彩的社会生活涵义,从而真正把数学的学术形态转化为教育形态,促进学生全面发展,提升人文精神.因此,新课标下需要将人文精神渗透于高中数学教学过程之中,更好地培养学生的数学素养及人文素养.

## 1 用好数学史,渗透数学文化

在教学内容上重视数学史的教育,通过这些历史充分展示人类创造数学这一灿烂文化的过程.在教学中渗透数学史,了解:数学家是如何从问题开始研究数学;数学家研究数学时必须要关注知识的来龙去脉;试验和证明是数学家研究问题过程中的两个阶段;数学家在合作交流中研究数学;数学家也会犯错误,也会有失败的时候……尝试引导学生把自己当作小“数学家”,引导学生在学习探究的过程中模仿数学家研究数学的过程,数学家研究数学的观点、思路和方法,激发学生学习数学的兴趣和热情,开阔学生的视野,培育学生的人文素养.

在高三数学数列求和复习课准备过程中,笔者首先分析本节课的思维逻辑的基础是对“数列

* 本文系北京市教育科学“十四五”规划 2022 年度一般课题“中学数学大概念下的项目式教学实践研究”(CDDB22352)的研究成果.

的前$n$项和”这一概念的深刻理解：数列的前$n$项和不是一个简单的求和计算，数列的前$n$项和$S_n$也是一个数列；数列的通项$a_n$，$S_n$是关于$n$的函数. 而求$S_n$本质上是确定$S_n$和序号$n$的关系，也就是求函数解析式. 通过大量阅读，笔者发现可以借助数学史料“垛积数”来开展，因此设计了“垛积数与数列求和”这节复习课：

先提出问题1：对三角形数通项的探究.

古希腊毕达哥拉斯在沙滩上用小石子代表点，研究点的个数与形的关系：

第$n$堆有$n$个点：形成$1,2,3,\cdots,n$，为自然数列.

接着提出问题：把一维的点垛积起来，它是什么图形(图1)？从数的规律上看，它是什么数列？

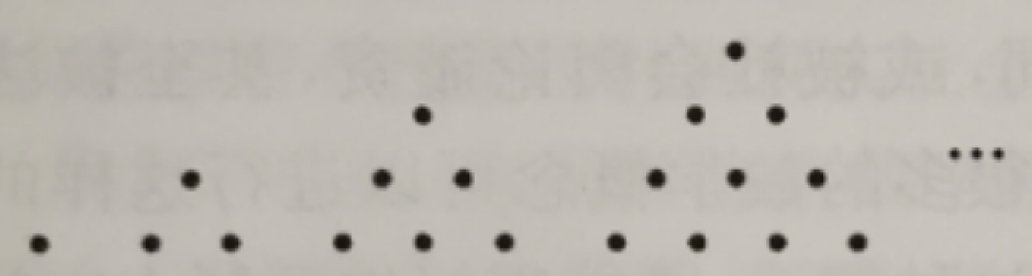

图1

从“形”的角度看，得到三角形数的概念，从“数”的角度分析，前$n$层点的个数和，即第$n$堆点的个数. 学生从对三角形数的递推关系、通项的研究，体会数列的前$n$项和$S_n$也是一个数列，感受数列中的和、差的运算关系，体会求通项或求和的关键是分析项与序号之间的运算关系.

然后提出“垛积数”的概念，它们是数与形的统一.

继续追问：三角形数$\{a_n\}$的通项$a_n=\dfrac{(n+1)n}{2}$，它是关于$n$的几次多项式？

引导学生养成观察代数式结构的习惯，并学会从多种角度分析代数式结构. 并且类比三角形数，垛积成正方形数、五边形数、六边形数等数列. 通过一系列的对话，学生体会到了垛积是数列求和运算，求和的几何表现就是垛积.

由一维到二维，再到三维，笔者提出问题2：如何把三角形数垛积起来呢？从图形上看是什么图形(图2)？它是什么数列？

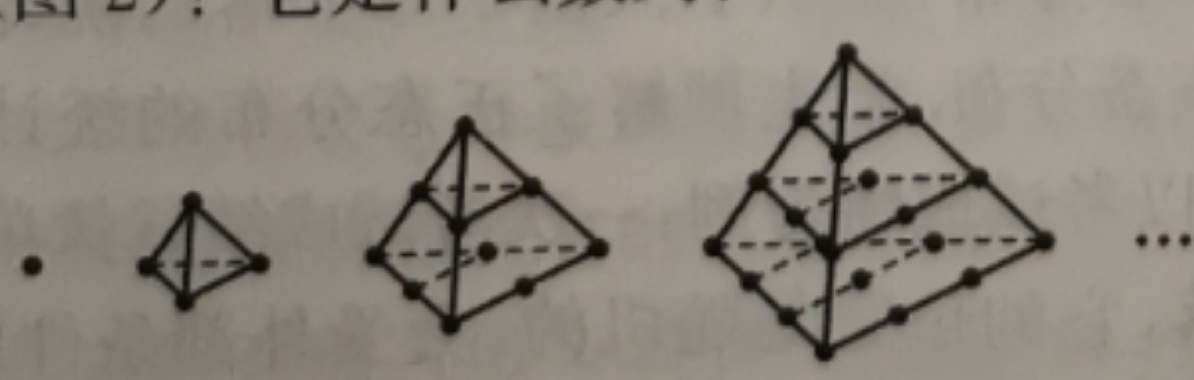

图2

继续研究，看到垛积数与组合数的联系，我们把它放在杨辉三角里，实际上垛积就是求和，集中体现了从常数列，自然数列，到二阶、三阶、高阶等差数列的变化.

然后对问题进行拓展：由毕达哥拉斯的三角形数到垛积数，再到垛积数与其他数列的和差积商的运算，这其中渗透的数学史的纵向发展.

(1) 垛积数与等比数列的比(或乘积)构成新数列的求和运算

17世纪雅各布·伯努利研究了垛积数与等比数列的比(或乘积)构成的新的数列的有限项和：$\{a_n\}$为垛积数，$\{b_n\}$为等比数列，求$\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{a_k}{b_k}$. 学生观察思考，采用错位相减法，错位减一次，次数降一次，不断“降次”，最终把求和问题转化为等比数列求和. 引导学生更进一步思考$\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{f(k)}{b_k}$，其中$f(k)$是关于$k$的多项式. 几次多项式，我们用错位相减法时就需要减几次.

(2) 垛积数倒数的前$n$项和

三角形数$a_n=\dfrac{(n+1)n}{2}$，它的倒数构成数列$\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$的前$n$项和，分析其通项结构，可以用裂项相消法来求和. 17世纪，雅各布·伯努利致力于研究正整数倒数的有限项和$\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}$，它困扰了数学家们很久，被雅各布用运算的方法解决了. 对于其他垛积数的倒数的有限和，虽然不清楚它的表达式，但是很容易找到它的上、下界：$\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k^2}\leqslant\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{(k-1)k}\leqslant 2-\dfrac{1}{n}<2$，$\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k^2}\geqslant\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k(k+1)}=1-\dfrac{1}{n+1}$，由此可见，随着$n$的增大，它趋于某个1至2之间的一个数. 计算该极限难倒了雅各布，最后被欧拉解决：$\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k^2}=\dfrac{\pi}{6}$. 但他没能求出立方体倒数和$\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k^3}$，这个问题至今还未解决，留待各位同学去探究.

笔者在设计这节复习课时，按照数学史纵向展开，使学生体会数学家们独立思考、静心钻研的学术态度及批判精神. 学生在学习过程中冷静思考、热烈讨论，思维向深度和广度展开，在数学文化中体会数列的运算思想，感受数学的理性精神.

同样是数列教学，在设计“由递推关系求数列通项”这一节课时，通过对数学史的简单回顾和梳理，我决定从趣味性很强、递推公式和通项公式的关系容易发现的汉诺塔游戏入手来引入课题.

汉诺塔问题

传说在古代印度的贝拿勒斯圣庙里，安放了一块黄铜板，板上插了 A,B,C 三根宝石柱，在其中一根宝石柱上，自上而下按由小到大的顺序串有 64 个金盘(图 3). 要求将 A 柱上的 64 个金盘按照下面的规则移到 C 柱上. 神预言当 64 个金盘从 A 全部移到 C 时，“世界末日”就要到来. 移动规则：① 一次只能移一个盘子；② 盘子只能在三个柱子上存放；③ 任何时候大盘不能放在小盘上面. 若 $a_k$ 记为将 A 上的 k 个金盘按上述规定全部移到 C 上所需要移动的最少次数，探究：将 A 柱上的 64 个金盘全部移到 C 柱上需要移动的最少次数.

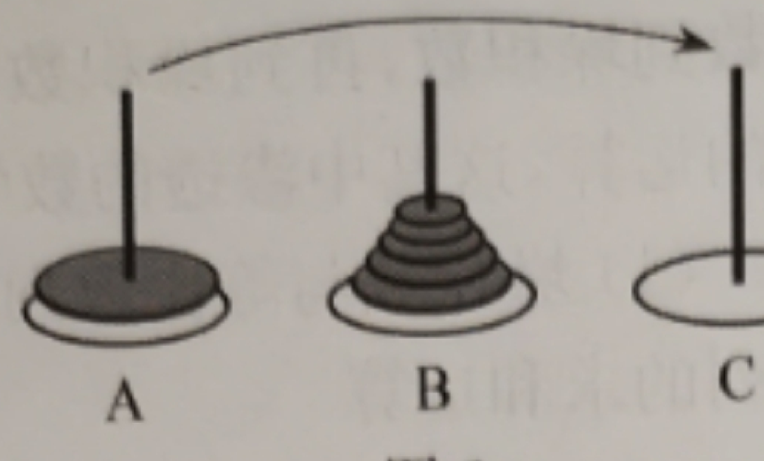

图 3

让学生实际操作，玩汉诺塔游戏，放手让其进行探究. 通过游戏情境，引发兴趣，集中学生的注意力，让他们在动手操作中从特殊到一般地探究规律. 学生通过实际操作，由移动一个圆盘、两个圆盘、三个圆盘的最少次数，即 $a_1,a_2,a_3$ 的值，发现 $a_1=1,a_2=3,a_3=7$，有学生猜测移动 $n$ 个圆盘的最少次数，即$\{a_n\}$的通项为 $a_n=2^n=1$. 如何证明呢？$a_n$ 与 $a_n=1$ 之间具有什么递推关系？如何通过递推关系求通项？学生通过实践操作，发现 $a_n=2a_{n-1}+1$，然后通过讨论、合作交流、总结归纳，发现 $a_n+1=2(a_{n-1}+1)$. 因此数列$\{a_n+1\}$为首项为 2、公比为 2 的等比数列，故 $a_n+1=2\times 2^{n-1}=2^n$，因此 $a_n=2^n-1$. 这样通过构造辅助数列$\{a_n+1\}$和等比数列的知识解决了由递推关系 $a_n=2a_{n-1}+1$ 求通项的问题.

这时，学生会发现，转移 64 个金盘所需要的最小移动次数 $a_{64}=2^{64}-1$，是一个非常大的数 18 446 744 073 709 551 615，若移动 1 次用时 1 秒，则移动完 64 个圆盘所需要的时间比宇宙的年龄大得多，我们也就不用担心“世界末日”了.

在教学过程中，借助合适的数学史和数学游戏素材，突出学生“人格主体”的培养和发展，创建融洽、和谐、平等的师生对话环境，使学生在增长数学知识、提升数学思维的同时，引发对历史和未来的思考，并从数学史中和数学家身上学到严谨、朴实、求是、创新的精神，从而产生对科学理性的崇尚与追求，在数学教学中提升人文精神.

## 2　数学概念公式的人文解读与引申

对于数学概念和公式的教学，除数学专业的视角外，如果多一种人文视角和联想，就会发现，很多数学概念和公式都有着丰富的人文内涵.

例如，在学习函数的概念时，对于函数定义域的理解，笔者在课堂中是这样进行人文解读和延伸的：如果把一个社会意义上的“人”看作是一个函数的话，定义域就是他应遵行的各种法律、规章制度和社会伦理道德规范，在函数里有“定义域优先”的原则，自变量必须保证在定义域内取值，否则函数就“无意义”. 类似地，每个人必须遵守这些法律、规章制度和社会伦理道德规范，否则就会被制度惩罚，或被社会舆论谴责，甚至被法律所制裁. 还有很多的数学概念可以进行这样的人文解读，通过这种解读，既能很好地解释人文社会的一些现象，又能对学生的价值观和行为习惯进行教育，引导学生用数学的眼光观察他所见到的社会现象，用数学的思维思考他所面对的现实问题.

班级有孩子考试失利，没发挥出最好水平，他们非常颓丧，向老师寻求帮助. 恰逢学习概率统计，在“正态分布”这节课上，笔者拿出事先准备的器材——高尔顿板，演示随机实验(图 4)：轻轻

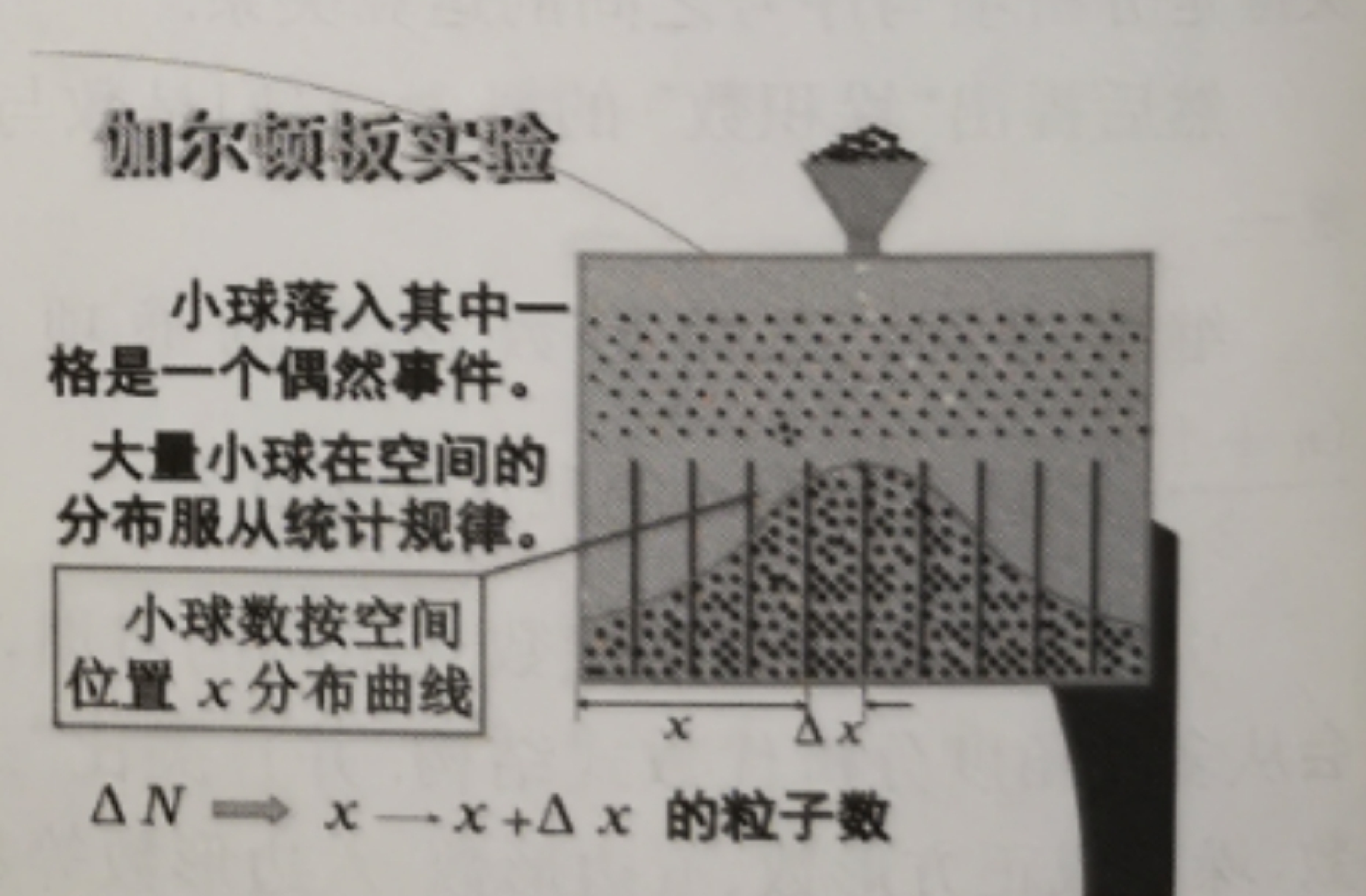

图 4

抽动挡板，有单个或少量的小球落下，小球落在哪个槽中是随机的，不可预见的，这说明了个别事件的随机性. 当小球全部下落后，大量小球呈现出对称的正态分布，显示了大量小球下落的统计规律服从正态分布. 学生理解了正态分布的统计规律后，我以考试成绩为例：一次考试成绩就像单个小球下落，它的位置是随机的，会受外部条件影响；但多次考试成绩的分布就像大量小球下落，服从正态分布. 若随机变量 $X$ 服从数学期望为 $\mu$、方差为 $\sigma^2$ 的正态分布，记为 $N(\mu,\sigma^2)$，期望值 $\mu$ 决定

了其位置，标准差 $\sigma$ 决定了分布的幅度，落在 $(\mu-3\sigma,\mu+3\sigma)$ 的概率约为 99.7%，即绝大多数都落在这个区间. 联想到自己的考试成绩，考得很好或者考得很差都是偶然事件，我们对待偶然的一次成功或者失利的态度，应该像范仲淹所说"不以物喜，不以己悲". 我们能做的是努力学习、调整状态等，让自己更稳定，提高 $\mu$（提高整体水平），降低 $\sigma$（让自己更稳定）. 在成长路上，幸运的事大体相似，不幸的时刻各不相同，这是随机的，那么，在充满随机与偶然的人生中，该用什么态度去面对呢？我们能做的是提升 $\mu$，降低 $\sigma$. 站到群山之巅，自然看得更远. 让我们做掌握自己命运的人！

通过这节课，学生不仅理解了正态分布，更学会了运用类比、联想等思维方法，将数学概念和公式所蕴含的哲理和智慧投射到现实社会和日常生活之中，用简明易懂、真实可信的数学原理来"解读"现实生活，用数学的眼光去观察世界，用数学的思维去分析社会、思考人生. 这样，抽象、简洁、纯粹的数学知识和思想方法，折射出了丰富多彩的社会生活意涵，"化冰冷的美丽为火热的思考"，从而真正把数学的学术形态转化为教育形态，达到培养和发展学生人文素养的目的.

### 3　数学问题的人文解读与深入探究

有些数学问题，有着丰富的人文背景和社会内涵. 从关注学生的成长、发展学生核心素养的角度来看，教学过程中不应浪费这些人文教育契机，应该对这些问题进行深入挖掘、适度拓展，适时地对学生进行人文教育.

一次高三模拟测试中，我们出了这样一个问题：如果甲的语文成绩或数学成绩至少有一项比乙高，则称甲不亚于乙. 在 100 个小伙儿中，如果某人不亚于其他 99 人，就称他为棒小伙儿. 那么，100 个小伙儿中的棒小伙儿最多可能有（　）个.

A. 1 个　B. 2 个　C. 50 个　D. 100 个

正确答案为 D，这是因为，要使棒小伙儿最多，构造极端情况：这 100 个小伙儿中，语文成绩最高的同时也是数学成绩最低的，语文第二高的同时也是数学第二低的……依此类推，语文成绩最低的同时也是数学成绩最高的. 如此构造，他们中每人都比他前面所有的人数学成绩高，同时又比他后面所有的人语文成绩高，所以每个人都是棒小伙儿.

这道题有着深刻的高等数学背景：二元有序数对不能按通常的大小关系排序，即在考虑他们的语文和数学成绩两个量时，我们不能简单地排出孰"优"孰"劣"，需要正确理解"不亚于"和"棒"的含义. 在对问题的解读和解决过程中，发现题目在严谨的数理逻辑中体现了丰富的人文意境，既需要理性思考，又需要大胆想象. 由此引申：数学中二元有序数对不能按通常的大小关系排序，多元的生活更不能简单排序，不能简单地去比较两个人，正所谓"尺有所短，寸有所长". 从教育的角度看，我们更不能简单地去比较两个学生，要善于发现学生的优点并给予鼓励，让每个孩子都成为"棒小伙儿". 这道数学题背后的人文解读与加德纳提出的"多元智力理论"不谋而合.

随着社会对人才需求的多元化以及人才全面发展、个性发展的要求，数学教学的目标也趋向多元化. 在数学中加强科学与人文的融合，倡导科学人文精神，能激发学生作为"社会人"的责任感和参与感，强化他们求真求实的精神. 现实世界中存在着许多社会问题，如淡水不足、交通拥挤、自然灾害等，以此类问题为数学背景构建数学模型，一方面可以帮助学生更好地掌握科学知识，另一方面也可引发学生对历史和现实的思考，提高他们的人文素养.

有几个学生对公交车非常感兴趣，他们组成课题小组利用休息时间调查海淀山后地区三十几条线路，采集包括平峰和高峰的客流数据后，发现公交车路线设置存在不合理之处. 邹同学利用数学中学习的简单会面几何概型对有两个对象发生的事件进行概率计算，对 575 路、512 路客流进行考察时发现如下问题：512 路所经的功能区多但高峰客流始终无法达到预期的理论值. 他们考虑到 575 路因为走向相似可能会对 512 路客流产生较大的影响. 于是将这个问题较为细化地进行了讨论与分析，经过较为精确的计算算出了 512 路的平均表现值，据此提出 512 路在实际调度时应采取的策略. 并以此为模型，为山后地区的公交线网优化调整做了一份详细的规划. 在规划中，他们为山后地区规划了 25 条公交线路. 在这份一万五千字的规划中，孩子们写明了每一条线路的站点、公里数、票价、发车间隔甚至停靠场站、选用车型等每一项具体信息. 这份规划最后以议案的形式提交给了北京市人大. 之后，北京公交集团对海淀山后地区 15 条公交线路进行了优化调整，而其中新开的专 16 路、调整的 633 路等多条线路，正是课题组在规划中所提到的（图 5）.

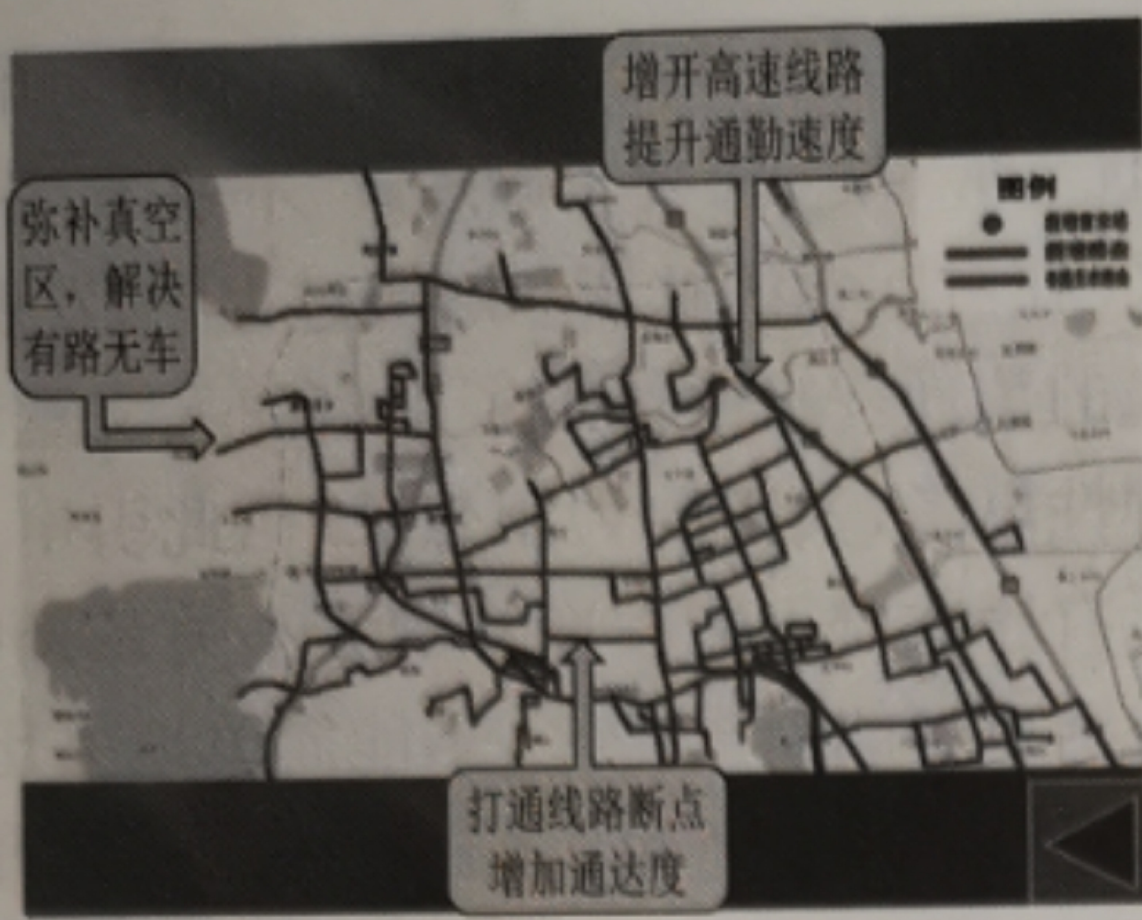


图5

## 4　结语

在数学教学中渗透人文精神，对数学问题、概念、公式进行人文解读和引申，不仅是为了让学生的数学学习更有趣，更是为了让学生更好地体验蕴藏在数学背后的理性的精神，体会数学对整个人类文化的促进和贡献，既重视由外而内的文化养成，更强调自我感悟与心灵觉解. 归根结底，它使人理解和重视人生的意义，并给社会一份人文关怀，在根本上体现教育的本质. 在这种教育理念下，学生对数学爱得更加深沉；在这种教育理念下，数学教育才可在每一个人身上有更多的沉淀和积累，并作为个人的文化底蕴中一块不可缺少的基石，伴随他的一生.

**参考文献**

[1]　中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017年版2020年修订)[M]. 北京：人民教育出版社，2018.

(上接第19页)

### 3.3　分析法解决几何问题

分析法也是解决许多几何证明题和结构不良题的一把利剑，在培养学生空间思维能力和直观想象能力的同时，也发展逻辑推理素养.

**案例3**　如图6所示，长方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，点 $E$，$F$ 分别在 $AA_1$，$CC_1$ 上，且 $B_1E\perp A_1B$，$B_1F\perp BC_1$. 求证：$BD_1\perp$ 平面 $B_1EF$.

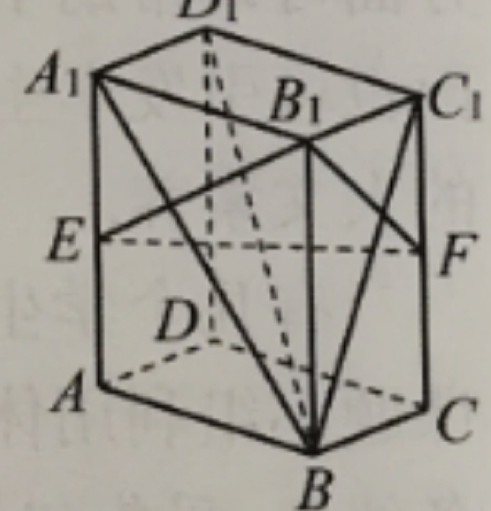


图6

**分析法(倒着干)**　证明 $BD_1\perp$ 平面 $B_1EF$ 等价于证明 $BD_1$ 垂直于平面 $B_1EF$ 内的两条相交直线，即等价于 $\begin{cases}BD_1\perp B_1E,\\BD_1\perp B_1F.\end{cases}$ $BD_1$ 与 $B_1E$，$BD_1$ 与 $B_1F$ 均是异面直线，证明线线垂直常常又转化为证明线面垂直，即证明 $BD_1\perp B_1E$ 等价于证明 $BD_1$ 垂直于 $B_1E$ 所在的平面或 $B_1E$ 垂直于 $BD_1$ 所在的平面.

继续从结论出发，把 $BD_1\perp B_1E$ 当成已知条件，结合题干已知 $B_1E\perp A_1B$，由此发现要证明 $B_1E$ 垂直于 $BD_1$ 所在的平面 $A_1BD_1$，等价于证明 $\begin{cases}B_1E\perp A_1D_1,\\B_1E\perp A_1B.\end{cases}$ 至此，整个解题思路已分析完成，接下来只需从正面出发，运用综合法写出论证过程.

**证明**　因为长方体中 $A_1D_1\perp$ 平面 $A_1ABB_1$，$B_1E\subset$ 平面 $A_1ABB_1$，所以 $B_1E\perp A_1D_1$. 因为已知 $B_1E\perp A_1B$，且 $A_1B\cap A_1D_1=A_1$，所以 $B_1E\perp$ 平面 $A_1BD_1$. 因为 $BD_1\subset$ 平面 $A_1BD_1$，所以 $B_1E\perp BD_1$. 同理 $B_1F\perp BD_1$. 又因为 $B_1E\cap B_1F=B_1$，所以 $BD_1\perp$ 平面 $B_1EF$.

**案例4**　(2023年惠州一调)如图7，在四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 中，$PA\perp$ 底面 $ABCD$，且底面各边都相等，$AC\cap BD=O$，$M$ 是 $PC$ 上的一动点，当 $M$ 点满足________时，平面 $MBD\perp$ 平面 $PCD$.(只要填写一个你认为正确的条件即可)

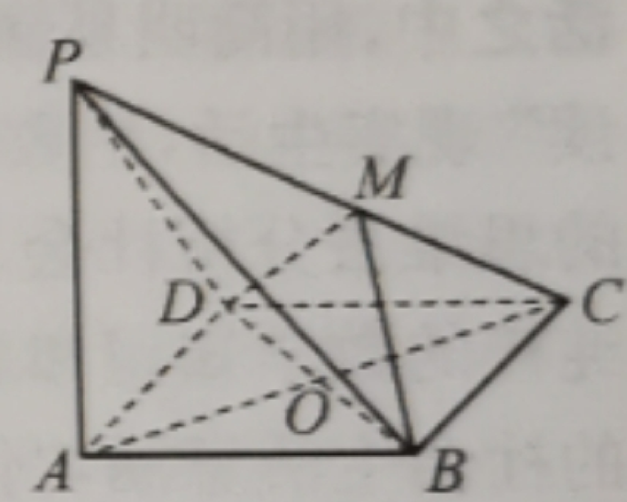


图7

**分析法(倒着干)**　从结论出发，要使平面 $MBD\perp$ 平面 $PCD$，等价于在平面 $PCD$ 内寻找一条直线(选 $PC$)垂直于平面 $MBD$，即等价于寻找一条直线(选 $PC$)垂直于平面 $MBD$ 内两条相交直线. 又因为 $\triangle PDC\cong\triangle PBC$，由此发现只需 $PC\perp DM$，则可得 $PC\perp BM$，即可得 $PC\perp$ 平面 $MBD$，从而可得平面 $MBD\perp$ 平面 $PCD$.

## 4　结语

新课标下要求教师要与时俱进地更新教学观念，创新教学方法，探寻有效的教学模式，发展学生的核心素养. 善用分析法是发展学生逻辑推理素养的有效路径，教学中要重视引导学生由问题的结论入手，逐步推理分析出解决问题的思路，再由综合法表达解决问题的过程. 以分析法(倒着干)为驱动，使学生经历一个推理证明、逻辑表达的论证闭环，真正地让逻辑推理素养落地，促进学生思维能力、实践能力和创新意识的发展.

**参考文献**

[1]　中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017年版)[M]. 北京：人民教育出版社，2018：1.
[2]　波利亚. 怎样解题[M]. 上海：上海科技教育出版社，2007：186-192.