

高中数学概念课教学设计的“四基点”*

——以“平面向量的概念”为例

李现勇,张荣欣(山东省青岛市教育科学研究院)

摘要: 数学研究的首要任务,就是从数学的角度,抽象出事物的本质属性,获得数学研究对象,这个过程也是学生获得数学概念的过程。文章以“平面向量的概念”一课为例,探索了高中数学概念课教学的四个基点,以期真正挖掘概念课在学生数学学习过程中的核心价值。

关键词: 概念课;平面向量;基点

文章编号: 1002-2171(2023)7-0030-03

人教A版教材的“主编寄语”中提到,“概念,是数学的精要所在,必须深刻理解、牢固掌握,因此概念学习要‘慢慢来’……在探究、质疑、反思中领悟数学概念及其蕴含的数学思想和方法,并用简明扼要的语言概括出来,从而实现认识升华。”学生概念把握不准,将会造成解题障碍,无法应用概念解决问题。下面笔者以“平面向量的概念”教学为例,探索高中数学概念课教学的四个基点,讨论概念课教学的有效策略。

1 基点1:整体理解教学内容

(1)内容解析。

在整个高中数学教学中,向量横向打通了代数、三角、几何等知识内容。在必修课程中,解三角形是平面向量在平面几何中应用的一个方面,复数的发展与应用都与向量有着紧密的联系;在选择性必修课程

中,空间向量是平面向量的推广与拓展。

(2)价值分析。

本单元从物理、几何、代数三个角度呈现了向量内容的研究途径与方法,蕴含了类比、归纳、抽象、数形结合等数学思想方法,是培养学生数学抽象、逻辑推理、直观想象、数学运算等核心素养的载体。

(3)课时分析。

本节课是“平面向量及其应用”的章起始课。学生在物理学科中学习的抽象出向量概念的方法可用于向量的加法、数乘、数量积的学习,为平面向量运算的学习提供了活动经验。因此,本节课要充分发挥章起始课的先行组织者作用,帮助学生梳理研究内容,明确研究路径,构建本章蓝图。

本节课是一节概念新授课,教材以位移、速度、力等物理量为背景,引导学生观察、辨识、类比,然后从

函数的基本路径。

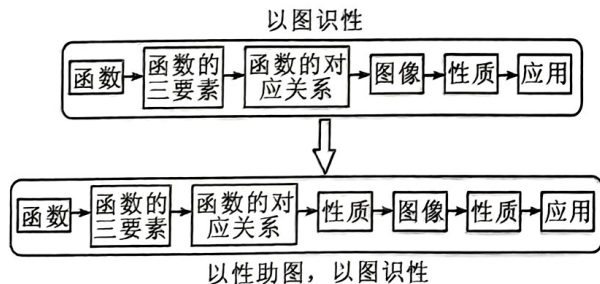


图5

4 结束语

概念教学应该是一个发现、发生、深化的过程,让学生在探索过程中看到概念存在的合理性、必要性、

系统性。从单元教学的视角,系统地梳理知识结构,挖掘数学概念的本质,分析学生的认知基础,把握教学的起点和目标,以大概概念和大任务为引导,进行概念抽象过程和辨析过程的设计,能够建构一个有层次推进的过程,让学生成为学习的主体。通过这一过程,帮助学生体验已有经验向新知识演变的过程,理解知识的来龙去脉,形成知识网络,构建活动经验系统,实现有意义学习。

参考文献:

- [1] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017年版2020年修订)[M]. 北京:人民教育出版社,2020.
- [2] 斯海霞,叶立军. 大概概念视角下的初中数学单元整体教学设计——以函数为例[J]. 数学通报,2021,60(7):23-28.

中总结、归纳共同的、本质性的特征,抽象概括出向量的概念(既有大小又有方向的量);再用有向线段直观表示向量,生成符号化和形式化表达,进而给出零向量、单位向量、平行向量、相等向量、共线向量的概念。因此,本节课的教学应当以多样化的活动突出数学抽象的过程,让学生在活动中参与概念生成的过程,积累从具体到抽象的活动经验,发展数学抽象素养。

2 基点 2:利用课标确定教学目标

《普通高中数学课程标准(2017年版 2020年修订)》〔下称《课标(2020年修订)》〕指出,要突出几何直观与代数运算之间的融合,即通过形与数的结合,感悟数学知识之间的联系,加强对数学整体性的理解。《课标(2020年修订)》在“教学提示”中指出,“应从力、速度、位移等实际情境入手,从物理、几何、代数三个角度理解向量的概念与运算法则……”在“学业要求”中指出,“重点提升直观想象、逻辑推理、数学运算和数学抽象等核心素养。”

基于以上研究,确定本节课的教学目标如下:

(1)能根据物理中的力、速度、位移等抽象出向量的概念,知道向量有大小和方向两个要素;能类比物理中的矢量说明平面向量的意义;能从几何、代数的角度描述平面向量的概念;能认识向量与数量之间的共性与差异。

(2)能利用以数轴上的点表示实数的经验,类比用有向线段表示平面向量;能解释平面向量的方向和长度;能解释零向量和单位向量的含义。

(3)能解释两个平面向量共线的含义,会判断两个平面向量是否共线;能描述两个平面向量相等的含义,会判断两个平面向量是否相等。

(4)经历向量概念的抽象过程,获得研究新对象的基本方法,体会类比、分类讨论、数形结合等数学思想方法。

3 基点 3:根据学情确定教学重难点

在平面向量的学习之前,学生已经通过物理学科学习了部分矢量,如力、位移、速度等,知道现实存在着大量既有大小又有方向的量,这些都是平面向量学习的知识基础;学生能够利用带箭头的线段表示位移等物理矢量,能够类比数的表示感受几何直观;在基本初等函数的学习过程中,学生已经多次使用类比的方法研究新的数学对象,对类比推理的方式较为熟悉。

但是,学生对于数学研究对象本质属性的提炼能力不足,容易导致对概念理解浮于表面;另外,学生对

事物的数学表示与事物本身的关系认知不足,因此,容易对有向线段和向量的关系在认知上产生障碍,继而影响对共线向量的理解。

基于以上分析,确定本节课的教学重点和教学难点如下:

教学重点:向量的概念,向量的几何表示,相等向量和共线向量的概念。

教学难点:向量的概念和共线向量的概念。

4 基点 4:把握教材设计教学过程

4.1 整体引领,明确路径,奠定学习基础

教材中的章引言、节引言对每一章、每一节的学习具有先行组织者的作用,它们不仅是内容的引入,还有内容的概述及数学思想方法的引导,阐释了“为什么学”“怎么学”“学什么”等重要问题。教师综合利用章引言、节引言,从学生既有经验入手,揭示平面向量的背景,通过阅读梳理章引言,用整体思想统一局部知识,使学生的学习方向明朗、学习方法明确,为后续学习奠定基础,同时使知识体系具有连续性和一贯性。

导入:在现实生活中,我们会遇到很多量,其中一些量在取定单位后只用一个实数就可以表示出来,还有一些量则不是这样,例如,图1中小船的位移。小船由A地向东南方向航行15 n mile到达B地(速度的大小为10 n mile/h)。这里,如果仅指出“由A地航行15 n mile”,而不指明向东南方向航行,那么

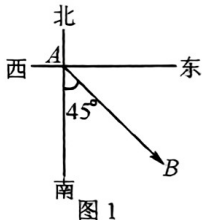


图1

小船就不一定到达B地了。这就是说,位移是既有大小又有方向的量。力、速度、加速度等也是这样的量。对这种既有大小又有方向的量进行抽象,就得到了我们本章将要研究的向量。

问题1 请阅读教材第1页的章引言,你能概括出本章的主要研究对象、研究方法和研究思路吗?

师生活动:学生阅读后交流、归纳,教师板书研究思路,即引入概念,类比探究运算及性质,建立运算体系。

4.2 贴近现实,创设情境,凸显研究方向

概念是从事物的共同特征归纳概括出来的,从现实背景过渡到数学情境,是数学抽象的第一步。

问题2 如果在学校门口,有人问如何到达图书馆,你会如何回答?

追问1 如何准确完整地表述?请在图示中做出合理的标注。

追问2 只根据距离是否可以准确地到达图书馆?

问题3 你能否根据已学知识,再举出一些既有

大小又有方向的量?

师生活动:学生在信息技术平台上提交答案,教师点评,并使用作图软件呈现相关图示。例如,教材章引言中小船的位移、小船航行的速度、物体受到的重力、浸在液体中的物体受到的浮力、天气预报中的风力与风向等。

追问3 它们有哪些共同的特征?你能否举出一些只有大小没有方向的量?

师生活动:教师引导学生归纳共性,摒弃非本质属性,并在与数量的比较中提炼上述这些量的本质属性——大小和方向。

4.3 联系旧知,注重类比,知识生成自然

面对新的研究对象和新的概念,教学过程中,教师可在新知识(学科内或跨学科)之间搭建桥梁,从原有的知识、经验、方法、路径中发现研究新知识的思路,最终掌握新知识。类比就是其中一种重要的方法。

问题4 定义概念之后,通常需要用数学符号抽象表示。数量如何表示?你能否类比得到向量的表示方法?

师生活动:学生先独立思考,再小组交流,最后全班交流。师生共同归纳出两种表示向量的方法:几何表示和字母表示。

教师还可以引导学生阅读教材第6页“阅读与思考”。

追问4 向量 $\overrightarrow{AB}$ 与向量 $\overrightarrow{BA}$ 是否一样,有什么联系与区别?

追问5 有向线段包含哪几个要素?向量和有向线段的关系是怎样的?

问题5 在实数集中有哪些特殊的元素?特殊性体现在哪些方面?类似地,在向量的集合中,有哪些特殊的向量?其特殊性体现在哪些方面?

追问6 零向量和单位向量是从“大小”角度来看的特殊向量,它们的方向是怎样的?

追问7 零向量在现实生活中存在吗,我们可以从哪些角度来认识它?

师生活动:学生独立思考后口述,教师点评,进而明确单位向量具有确定的方向,单位向量有无数个;教师可以借助物理背景帮助学生分别从静态和动态理解零向量的方向是任意的:零向量可以看作一个质点并未发生运动,也可以看作质点在运动后返回起点。

4.4 问题驱动,深化探究,突破教学难点

概念辨析是概念学习过程中必不可少的环节。为了加强概念理解,教师可提供一些针对性的练习,如命题真假性判断,通过正例与反例让学生在用概念

判断的过程中辨析,从而加深对概念内涵和外延的理解,形成对概念本质特征的理解,真正地完成概念的数学化过程。在点评中,教师可进行适当的追问、变式和补充,帮助学生从各个视角理解概念。

问题6 数的基本性质就是数的大小关系,那么向量的基本性质是什么?

追问8 你能否根据它们各自的特征对其命名,并尝试下定义?

追问9 向量的平行、共线与平面几何中直线(线段)的平行、共线有什么区别?

问题7 请利用概念判断以下命题的真假,并说明理由。

- ①若 $|a|=|b|$,则 $a=b$;
- ②若 $|a|>|b|$,则 $a>b$;
- ③若 $a=b, b=c$,则 $a=c$;
- ④若 $a//b, b//c$,则 $a//c$;
- ⑤若 $|a|=|b|, a//b$,则 $a=b$;
- ⑥若向量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{CD}$ 共线,则A,B,C,D四点共线。

4.5 应用迁移,适时评测,落实“四基四能”

例1 如图2,设O是正六边形ABCDEF的中心。

- (1)写出图中的共线向量;
- (2)分别写出图中与 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ 相等的向量;

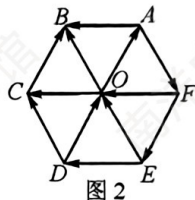


图2

(3)请在正六边形中自主标注一些向量,并梳理它们之间的向量关系。

问题8 通过以下问题,回顾本节课的学习内容。

- (1)什么是向量?其本质是什么?
- (2)你能总结归纳本节课我们是如何研究向量概念及其表示的吗?
- (3)向量的性质要研究的问题是什么?我们是如何发现这些性质的?
- (4)你能概括研究向量概念的基本思路吗?

5 结束语

对于高中数学概念课,教师要围绕“四基点”开展教学设计,在“四个理解”(理解数学,理解学生,理解教学,理解技术)的基础上,精心设计利于学生发现共同属性、抽象数学概念的情境,然后通过问题引导他们揭示并归纳具体实例的共同属性,深化对概念的理解,进而自觉地树立解决问题的意识,发展学生的核心素养。

* 本文系山东省教育科学“十四五”规划课题“数学文化融入高中数学概念教学的实践研究”(课题批准号 2021ZC246)阶段性研究成果。