

在数学教学中 落实深度学习的探究与实践

——以“直线 $y=x$ 与正弦函数 $y=\sin x$ 的位置关系”教学为例

李思雨(广东省深圳市深圳大学附属中学)

丁书明(广东省深圳市翠园中学)

摘要:以“探究直线 $y=x$ 与正弦曲线 $y=\sin x$ 的位置关系”为例,阐述对深度学习的理解,包括如何设置具有挑战性的问题、如何设计探究活动、如何调动学生探究的积极性等,揭示在课堂教学中落实深度学习的一般方法。

关键词:深度学习;挑战性问题;探究活动;探究积极性

文章编号:1002-2171(2024)7-0032-03

1 对深度学习的理解

所谓深度学习,就是指在教师引领下,学生围绕着具有挑战性的学习主题,全身心积极参与、体验成功、获得发展的有意义的学习过程。在这个过程中,学生掌握学科的核心知识,理解学习的过程,把握学科的本质及思想方法,形成积极的内在学习动机、高级的社会性情感、积极的态度、正确的价值观,成为既具独立性、批判性、创造性,又有合作精神,基础扎实的优秀的学习者,成为未来社会历史实践的主人^[1]。

一句话概括,深度学习就是使学生经历从数学的基本概念、基本原理的产生与理解,到数学思想与数学能力的培养,再到改善思维品质,发展数学核心素养的一个由底层到高层的学习过程。

然而,在实际教学中,将理念转化为恰当的教学行为并非易事,教师往往很难将教学内容、教学目标、学生发展以及师生活动统一起来,并将教学目标逐步落实在以问题串构成的教学环节中。

本文以人教A版《数学》(选择性必修第二册)第97页的一道课后习题的探究活动为例,展示如何在

数学教学中设置具有挑战性的问题,以问题解决为线索设计探究活动,在活动中体会用已有知识解决未知数学问题的过程与方法,体会数学思想方法的应用,积累开展数学探究活动的基本经验。

2 基于深度学习的数学探究课尝试

问题:利用函数单调性,证明不等式 $\sin x < x$, $x \in (0, \pi)$,并通过函数图像直观验证。

这是《数学》(选择性必修第二册)“5.3.2 函数的极值和最大(小)值”的一道课后习题,目的在于培养学生的问题探究意识和创新精神;借助几何直观和代数论证,经历直线与曲线的位置关系的探究过程,积累基本活动经验,发展学生的直观想象和逻辑推理等核心素养。

2.1 设计学案,课前探究

将问题进行改编形成课前探究学案:

在同一个直角坐标系中,作出直线 $y=x$ 与正弦曲线 $y=\sin x$ 的图像,观察并猜想以下问题。

(1)直线 $y=x$ 与正弦曲线 $y=\sin x$ 的图像有什么位置关系?这两个图像有公共点吗?如果有公共

决问题,转识成智,发展学生直观想象、数学抽象、逻辑推理、数学运算等核心素养。

参考文献:

- [1] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017版2020年修订)[M]. 北京:人民教育出版社,2020.
- [2] 孙宏安. 谈数学能力和数学学科关键能力——学习《普通高中数学课程标准(2017年版)》[J]. 中学数学教学参考(上旬),2023(6):2-7.

的建构过程。通过这些基本活动经验,综合函数的单调性定义和导数的概念,进行再创造,形成了用导数判断函数单调性的基本技能,体会数形结合、由具体到抽象、特殊到一般等数学思想方法;提高学生的参与意识和数学表达能力,引导其发挥主观能动性。概念生成后再提出问题,让学生经历结论不断修正的过程,体会数学语言表述的严谨性。通过已有的知识引导学生从数学的角度发现和提出问题,进而分析和解

点,有几个?

(2)若 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, 请借助信息技术手段或利用现有的知识储备对问题(1)中的结论做进一步验证。

(3)通过画图猜想是否可以得到结论“ $\sin x < x$, $x \in (0, \pi)$ ”? 可以进行严格的证明吗?

设计意图:利用学案引导学生动手画图或应用《几何画板》作图,经历观察图像、产生猜想、实验验证、严谨证明的探究过程。这是一个富有挑战性和探究性的问题,会激起学生的学习兴趣,使他们进行独立探索和思考,体会数学探究的方法与过程,积累活动经验,提高分析问题、解决问题的能力。

2.2 展示交流,课中探究

2.2.1 交流成果,提出问题

问题1:课前学案中图像交点的个数大家给出了三种结果,分别是一个公共点、三个公共点以及无数个公共点,你认为哪种是正确结果? 请分享一下你的想法。

课堂活动1:以小组为单位交流自己的思考和探究的结论和证明过程。

课堂活动2:从不同结论的小组中各请一名学生作为代表上台展示各小组探究的过程。

设计意图:为学生创造独立思考和合作探究的机会,调动其探究的积极性,这是开展深度学习的关键;手工作图准确性较差,学生的结论不统一,容易产生认知的矛盾。利用几何直观容易猜测出结论:函数 $y=x$ 与正弦曲线 $y=\sin x$ 的图像仅有一个公共点,即坐标原点,当 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 时直线 $y=x$ 在正弦曲线 $y=\sin x$ 的上方,二者没有公共点。但证明是难点,结论的证明是一个具有挑战性的问题,迫使学生思考如何将问题进行等价转化,要调用什么数学知识或工具加以解决。

2.2.2 几何直观,实验探索

问题2:为了进一步验证我们的猜想,是否可以利用信息技术作出函数的图像呢?

课堂活动3:学生用信息技术作出函数 $y=x$ 的图像与正弦曲线 $y=\sin x$ 在 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 时的图像,比较二者的关系,或者作出函数 $f(x)=x-\sin x$ 的图像,通过图像与 x 轴的位置关系来验证结论。

结果1:通过《几何画板》演示,改变自变量的值,观察函数的变化。发现:当 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 时,直线 $y=x$ 始终在正弦曲线 $y=\sin x$ 的上方,或者函数 $f(x)=x-\sin x$ 的图像始终在 x 轴的上方。

结果2:在 x 无限接近0时,很难通过观察分辨出直线是不是始终在曲线的上方,感觉直线与曲线基本重合。

设计意图:图形的优点在于直观,可以猜测结论,

缺点在于不够精确,要想解决这一问题只能依靠严谨的数学证明。信息技术结合简单的数学算式让不可能变成可能,引导学生不断地寻求解决问题的方法,实现真正意义上的启发式教学。

2.2.3 代数推理,严谨论证

问题3:对于由函数图像得到的猜想,如何进行严谨的代数证明?

课堂活动4:给学生一定的时间进行小组交流并共同完成“当 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 时, $x > \sin x$ ”的证明,教师将小组成果利用希沃白板手机拍照直接投影出来,请小组代表分享各组的分析思路和证明方法。

证法1:设 $F(x)=x-\sin x$, $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, 运用导数判断该函数的单调性,再证明该函数在区间 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内恒正。

证法2:利用三角函数线,如图1。因为 $S_{\triangle OAP} < S_{\text{扇形} OAP}$, 所以 $\frac{1}{2}r \times |MP| < \frac{1}{2}xr^2$ 。

因为 $r=1$, 所以 $\sin x < x$ 。

设计意图:由几何直观提出猜想,但猜想是否正确需要严谨的代数证明。展示不同的证明过程,可以开阔学生的思路。解决问题时,不仅要使学生体会数形结合思想方法,更重要的是让他们体验探究的乐趣、成功的喜悦、智慧的美妙,使学生自然而然地受到吸引,这是深度学习的必要条件。

2.2.4 类比迁移,推广结论

问题4: $x > \sin x$ 只在区间 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内成立吗? 将 x 的取值范围扩大结论还成立吗?

课堂活动5:师生共同探究得出结论,即当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $x > \sin x$ 。

设计意图:回顾直线 $y=x$ 与正弦曲线 $y=\sin x$ 的位置关系的探究过程,归纳出探究问题的一般路径,即观察发现—提出猜想—实验验证—严谨证明。由 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 推广到 $x \in (0, +\infty)$, 优化结论,从而完善了学生对正弦曲线的认知结构。

问题5:当 $x \in (-\infty, 0)$ 时,直线 $y=x$ 与正弦曲线 $y=\sin x$ 有怎样的位置关系? 有公共点吗?

问题6:通过前面的研究,你认为直线 $y=x$ 与正弦曲线 $y=\sin x$ 有怎样的位置关系? 你还有什么发现?

课堂活动6:归纳上面的探究结论得

(1)当 $x \in (0, +\infty)$ 时,直线 $y=x$ 在正弦曲线 $y=\sin x$ 的上方,当 $x \in (-\infty, 0)$ 时,直线 $y=x$ 在正弦曲线 $y=\sin x$ 的下方;

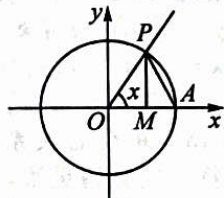


图1

(2) 直线 $y=x$ 与正弦曲线 $y=\sin x$ 有且仅有一个公共点 $O(0,0)$;

(3) 通过求出正弦曲线在 O 点处的切线, 知直线 $y=x$ 与正弦曲线 $y=\sin x$ 在 O 点处相切。

设计意图: 类比得到当 $x \in (-\infty, 0)$ 时 $x < \sin x$ 恒成立, 直线 $y=x$ 是正弦曲线 $y=\sin x$ 在 O 点处的切线。既是对前面结论的完善, 又为下面更一般性的探究打好基础, 同时渗透类比、转化的数学思想方法。

2.2.5 应用提升, 拓展探究

问题 7: 当 $k > 0$ 时, 直线 $y=kx$ 与正弦曲线 $y=\sin x$ 有怎样的位置关系? 怎样进行证明?

课堂活动 7: 利用《几何画板》旋转直线 $y=x$, 让学生感受当 k 取不同值时, $y=kx$ 与 $y=\sin x$ 的位置关系, 并得出结论: 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, 若 $k \geq 1$, 则 $kx > \sin x$ 。(这里结论不完整, 即当 $0 < k < 1$ 时, 有什么位置关系没有说明, 可以看出来, 但证明是个难点, 可以放在课后探究中完成)

问题 8: 若 $k > 0, \omega > 0$, 当 k, ω 满足什么条件时 $kx > \sin \omega x, x \in (0, +\infty)$ 恒成立?

设计意图: 通过类比直线 $y=x$ 与正弦曲线 $y=\sin x$ 的位置关系, 由特殊到一般, 将问题深化, 深度探究的味道更浓, 进一步得到更一般的结论。采用几何直观和代数证明, 形象且严谨地呈现了两者的位置关系, 再次渗透了转化与化归的数学思想方法。

2.2.6 总结反思, 交流分享

(1) 本节课我们掌握了什么数学知识?

(2) 数学问题探究的过程有哪几个步骤?

(3) 在解决问题的过程中你感悟到了哪些数学思想方法?

设计意图: 从学习数学知识和感悟数学思想方法两个方面进行总结, 引领学生关注“学到”和“会学”两个方面的收获。

2.3 课后思考, 拓展延伸

探究任务 1: 利用函数的单调性, 证明下列不等式, 并通过函数图像直观验证。

(1) $e^x > 1+x, x \neq 0$; (2) $\ln x < x < e^x, x > 0$ 。

探究任务 2: 通过本节课的学习, 思考还可以研究哪些函数之间的位置关系? 你可以命制一道类似的数学问题吗? 请将你的结论或命制的题目以及解答写在探究报告里。

设计意图: 通过本节内容的学习, 学生对上述问题很容易想到构造差函数, 再利用证明差函数大于零(或小于零)恒成立的方法来解决, 证明后再通过函数图像来直观验证, 可以感受“数”与“形”的统一, 体会数学之美。

3 教学反思

3.1 发掘挑战性的学习主题

善于发现教学中适合开展深度学习的素材和主

题, 如数学原理课、数学公式的推导与应用课, 在教材习题中发现素材^[2], 教材中《探究与发现》《拓广与探索》栏目中的习题或问题通常可以作为探究主题, 如本文的主题就是在课后习题中发现的。

3.2 自下而上地设计教学目标

教学目标是一节课的灵魂, 设计教学目标要自下而上, 即向下能深入理解数学概念与原理、掌握相应的数学知识与方法, 以此为基础向上逐层递进的教学目标分别是培养数学能力、渗透数学思想方法、改善思维品质、发展核心素养。

3.3 吸引学生全身心积极参与

只有学生全身心地积极参与的课堂方能称为“深度”课堂。为此要设计具有挑战性的问题串, 引导思考方向, 安排充满思维的数学实验和探究活动, 如思考活动、运用信息工具作图活动、小组讨论活动、实际操作活动以及展示汇报活动等, 这些活动的开展能使学生很快被带入问题情境, 参与感越强, 参与的程度就越深, 学习的收获也就越大。从数学实验走向数学化, 这对培养他们的问题意识、提升数学活动的思维深度至关重要^[3]。真正的深度学习, 需要教师营造民主、合作的学习环境, 学生经历思维挑战的过程, 在合作探究中主动把原有的认知结构迁移到新的学习情境中, 从而建构起新的认知结构。

3.4 教育技术高效助力

注重信息技术与数学课程的深度融合, 提高教学的实效性^[4]。有效利用信息技术促进学生的学和教师的教, 将抽象内容可视化, 静态内容动态化, 借助技术改变课堂生态, 实现大面积个性化的教学和优质资源的共享, 呈现深度课堂。比较常用的教学技术工具有 Excel、《几何画板》、希沃数学画板、GGB、网络画工具等。在日常教学中可以有意识地教会学生这些工具的使用, 也可以开设相关数学工具软件学习与应用的选修课。如果条件允许, 高中学校应该建立数学实验室, 很多数学探究课可以考虑在数学实验室中进行, 使得只能由教师在讲台上演示的操作活动改为由学生亲自动手操作, 效果会更好。

参考文献:

- [1] 刘月霞, 郭华. 深度学习: 走向核心素养[M]. 北京: 教育科学出版社, 2018.
- [2] 丁忠华. 高中数学课后习题的讲解和运用[J]. 中学数学教学参考(下旬), 2016(1/2): 72-73.
- [3] 高建国. 指向深度学习的数学活动探究[J]. 教学与管理, 2022(16): 56-60.
- [4] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017年版 2020 年修订)[M]. 北京: 人民教育出版社, 2020.