高中数学概念的内涵、特征及其教学程序

李传峰（上海市建平中学）

摘　要：在课堂教学中把“学习数学概念”变成“构建数学概念”，不仅可以更好地理解和掌握相关概念，更是提升学生数学思维水平，感悟学科本质的有效途径。

关键词：解题观；数学概念教学；数学建模
文章编号：1002-2171(2025)1-0022-04

1　数学概念的内涵

“水”“苹果”等属于描述现实生活的概念，“爱”或“恨”等属于描述纯感性对象的主观生活概念。这些生活概念的外延允许模糊存在，例如，生活中“水”概念的外延仅指液体状态，还是包含气体和固体状态呢？对此大家理解虽有差异，但无对错之分，且生活概念往往凭借感性直觉即可，不一定非要抽象出确定的内涵特征。而数学概念则不同，它是客观性与主观性的统一，其客观性体现在概念外延的确定性，主观性体现在概念内涵的抽象性。

1.1　数学概念的本质

数学概念本质上是一种发明[1]。数学概念的定义是人基于客观数学需要，借助数学思维主观构建的数学模型。

有些数学概念（特别是基于客观现实抽象出来的数学概念）先有概念外延，再根据概念外延抽象归纳概念的内涵（为方便表述，本文称之为外延型概念）。例如，棱柱概念就是外延型概念，它是我们对一类现实柱体的概括抽象。人类基于对现实空间模型的概括抽象，先有了棱柱的外延认识，然后试图对这些棱柱的外延进行共同特征（内涵）抽象。欧几里得对棱柱内涵的抽象是：一个棱柱是一个立体图形，它是由一些平面构成的，其中有两个面是相对的、相等的、相似且平行的，其他各面都是平行四边形（《几何原本》第11卷）。许多学生对正十二面体为什么不是棱柱感到疑惑。正十二面体虽然符合欧几里得的棱柱定义，但我们认为它不是棱柱，是我们基于对棱柱外延的感性认识的判断。这说明欧几里得对棱柱概念的内涵特征抽象有疏漏。教材中给出了不同于《几何原本》的棱柱概念：有一对互相平行的面，且这两个面是全等的三角形或平面多边形；同时，不在这两个面上的棱互相平行。我们把这样的多面体叫作棱柱[2]。

有些数学概念（特别是因为数学内在自我完善需要而产生的概念）是先有内涵，然后根据内涵特征演绎推理出其概念外延（本文称之为推理型概念）。例如，二面角的平面角概念就是人们为了度量二面角的大小而主观创造出来的推理型数学概念。其外延（0°二面角、锐二面角、直二面角、钝二面角等所有具体的二面角）可以由二面角的平面角概念内涵确定。二面角的平面角的概念为什么选择从棱上一点出发，分别在两个半平面内作与棱均垂直的射线所成的角作为二面角的平面角？这种定义体现了数学家基于完善数学结构的需要而创造性的模型构建。

1.2　数学概念的类型

数学概念按外延的大小可以大约分成三类：

(1)大概念：一般指数学分支起始概念，外延极大，如平面的概念。

(2)中概念：介于大概念和小概念之间，外延较大，如多面体的概念。

(3)小概念：在所属概念体系中，外延较小，如二面角的概念。

1.3　数学概念的主要定义方式

(1)直觉定义法。

凭直觉产生的原始概念（原名），这些概念不能用其他概念来定义，它的内涵只能借助一些术语或它们的特征进行直观描述。例如，平面的概念。

（2）内涵定义法。

高中数学中最常见的内涵定义法是属加种差定义法：被定义概念＝种差＋属概念。属加种差定义说明了被定义概念的两个内涵特征：①它是哪个"阵营"的？（被定义概念属于哪个更大的概念集合）；②它的特有性质〔有什么独特的属性（即种差）〕[3]。例如，棱柱的概念。

（3）外延定义法。

外延定义法又叫归纳定义法，它是通过给出概念外延来定义概念。例如，圆锥曲线概念的定义。

2 数学概念学习特征

2.1 概念理解的双向性

理解数学概念就是既要抽象数学概念的内涵又要明确数学概念的外延，从而同时获得对数学概念的抽象理解和直观认识。这个特点我们称为双向性。例如，函数概念，函数的定义给出了其概念的内涵特征，学生通过对函数内涵特征的抽象概括获得对函数概念的抽象理解；而一元二次函数等具体函数的外延使学习者对什么是函数有了更直观的认识。

有些数学概念的内涵很难抽象，这种概念往往用概括其外延来定义。例如，实数概念的定义。

有些数学概念既可以通过抽象内涵来定义，也可以通过概括外延来定义。例如，幂函数（指数函数、对数函数）的定义，上海二期课改教材中，由于先学习函数的概念，再学习具体函数的概念，所以作为函数概念外延的幂函数容易被学生理解和接受。教材采用外延定义法：一般的，函数 $y=x^k$（k 为常数，$k\in\mathbf{Q}$）叫作幂函数[4]。而新教材由于先学习幂函数、指数函数、对数函数等具体函数，再学习函数的概念，所以幂函数定义不宜采用外延定义法，只能通过刻画等式 $y=x^a$ 中变量 x 与变量 y 之间存在的内在依赖关系（即函数关系）来定义：当指数 a 固定，等式 $y=x^a$ 确定了变量 y 随变量 x 变化的规律，称为指数为 a 的幂函数[5]。

2.2 概念学习过程的动态性

数学概念学习是包含纵向时间（概念发展史）探索和横向联系（概念与概念的关系）探索的动态解题过程。

数学概念的定义作为一种发明，它是人类思维创造的产物，具有主观特性。因而不同人所创造的不同概念之间可能有相近内涵特征或外延关联。例如，数学中"向量"的概念和物理中"矢量"的概念就具有极大相关性，甚至许多时候可以看作是同一概念。

概念定义的表达除了逻辑合理性还兼具合情性的考量。数学概念的内涵要适合时代要求和学习者的需要，内涵抽象角度不一定是唯一的，可以有不同的抽象，因而其内涵特征不是绝对不变的，进而同一数学概念其外延也是可变化的，这造成许多概念的"名"与"实"的背离。所以数学概念的定义具有动态的变化过程和静态的对象名称两重性特征。

2.3 概念教学实践的开放性

数学概念的学习是开放的，因为数学概念的外延与内涵具有历史演变性，对数学概念的理解必然要了解其来龙去脉，这个过程仅仅依靠封闭的课堂教学是不能实现的，需要师生共同借助数学史料，通过多种信息渠道进行查询、甄别、融会贯通。

如何定义教材中的数学概念，不仅要从数学学科本身考量，学习者的条件和教材逻辑结构等都是教材编写者所要综合考量的因素。

还是以函数概念的定义为例。

初中函数概念的定义：在某个变化过程中有两个变量，设为 x 和 y，如果在变量 x 的允许取值范围内，变量 y 随着 x 的变化而变化，它们之间存在着确定的依赖关系，那么变量 y 叫作变量 x 的函数[6]。这个函数定义外延包括如 $y=\begin{cases}x, x\geqslant 0,\\ \dfrac{1}{x}, x<0\end{cases}$ 这样分段表示的函数，还包括如 $y=\cos x$（$x\in[0°,90°]$）这样定义域不是实数的解析式，但不包括如"$y=1$（$x\in\mathbf{R}$）"这样的常值函数。

高中函数概念定义：设 D 是一个非空的实数集，如果按照某种确定的对应法则 f，使对集合 D 中的任意给定的 x，都有唯一确定的 y 与之对应，就称这个对应关系 f 为集合 D 上的一个函数，记作 $y=f(x)$，$x\in D$[5]。

这个定义与初中定义不同，不是把变化结果（y）叫作函数，而是把对应关系叫作函数。同时把这种关系限定在实数集或其子集之间，这样就使函数外延包括了常值函数，但不包括变量不是实数的关系式。这样定义把我们通常讲的"分段函数"排除出概念外延。因此上海新教材把以往的"分段函数"改称为"函数的

分段表示法”[5]。

2.4 概念教学评价的综合性

基于解题视角的数学概念教学的评价很难有唯一标准，因而必然是综合的。主要体现在对概念掌握评价标准具有时间弹性和个体弹性。

时间弹性是指同一概念在不同时间对同一个体的要求可以不一致。例如，对函数概念的掌握，初中掌握的函数概念是偏生活化的直观描述；高中生（以上海为例）在高一学习第四章幂函数、指数函数、对数函数时所掌握的函数概念是偏外延归纳的特殊函数；学习完第五章函数的概念、性质及应用后，对函数概念的掌握上升到实数 x,y 对应关系的内涵抽象层次；学习完三角函数和反三角函数以后，学生对函数的理解会更丰富；学习完概率论的相关知识后，学生对函数的对应关系的认识再上一个台阶。

个体弹性是指在同一时间对不同数学基础和能力的学生应该有不同的数学概念评价标准。例如，在高一初始阶段允许部分数学基础薄弱的学生暂时对函数概念的理解停留在初中水平上，也鼓励部分数学能力突出的学生对函数概念的理解超越高中的教学要求。

3 数学概念教学程序

构建数学概念基本程序：概念预习、概念讨论、概念归纳与抽象、概念应用。

3.1 概念预习

通过预习可以使数学概念的学习由封闭走向开放，学生利用专业书刊、报纸等传统媒体资源和知网、知乎、百度、网络自媒体、人工智能等新型媒体资源，可以充分了解所要学习数学概念的相关信息，对自己认为重要的内容和无法确定真伪或有疑义的内容进行整理和记录，为概念讨论做好准备。

3.2 概念讨论

在课堂教学中，教师通过问题串的方式（问题可以由教师设计，也可以来源于学生预习中产生的疑问）组织学生共同讨论解决困惑。

主要围绕以下问题：(1)概念的来源（外延型还是推理型）；(2)概念的类型（外延的大小）；(3)概念的定义方式；(4)构建概念的难点；(5)概念如何应用。

3.3 概念归纳与抽象

对充分讨论的概念共同归纳其外延，抽象其内涵。

继续以函数概念为例，前面谈到函数概念若从“变量”的角度定义，突出了函数“变”的特征；若从“对应”的角度定义，突破函数解析式的束缚；学生学习了“成对数据的相关性分析”[7]后，还可以从两组数据的相关性角度定义函数：两个变量 X,Y 分别对应两组数据 $\{x_i\}(i=1,2,\cdots,n)$ 和 $\{y_j\}(j=1,2,\cdots,n)$，它们的相关性可以用相关系数 $r(r\in[-1,1])$ 来刻画，当 $r=\pm1$ 时两个变量 X,Y 之间存在函数关系[8]。显然，这里的函数关系突破了两个量之间的因果关系，即不能确定谁是自变量，谁是因变量。

3.4 概念应用

数学概念作为数学模型，本身就是为解决数学问题而存在的。概念应用是构建数学概念的必然要求。在复杂或看似无关的问题情境中能够顺利抽象出内隐的数学概念，是数学概念获得深刻掌握的标志。

例1 （2023年高考数学上海卷第12题）空间中存在三点 A,B,C，满足 $AB=BC=AC=1$，在空间中任取不同的两点（不计顺序），使得这两点与 A,B,C 可以组成正四棱锥，则共有________种方案。

本题本质上可看作二面角概念的考查。构建直二面角和锐二面角的几何模型：如图1，由正四棱锥定义可知△ABC 三顶点不能全在四棱锥底面上，考虑平面 ABC 与正四棱锥底面所成二面角的大小，若平面 ABC 垂直于底面，即所成二面角为直二面角，则这样的二面角唯一存在，分别选△ABC 不同的边作底面正方形的对角线，可知满足条件的正四棱锥有3个，若△ABC 是正四棱锥的一个侧面，这时△ABC 与底面所成的锐二面角大小为 $\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$，这样的锐二面角成对存在，满足条件的正四棱锥有6个，所以共有9种方案。

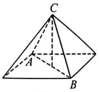

图1

4 结语

从解题视角把传统的“学习数学概念”变成“构建数学概念”不仅仅是叫法的变化，它体现了我们对数学概念定义的重新解读。传统的数学概念教学是把数学概念的定义看成静态的、封闭的、客观的陈述性知识加以理解和接受，主要关注概念定义的逻辑合理性、内涵绝对性和外延确定性。“构建数学概念”本质是把概念学习看成是主观的、动态的、开放的数学建模过程。通过“构建数学概念”不仅更有利于学生归纳数学概念的外延和抽象数学概念的内涵，还有利于学生进一步挖掘数学概念定义的主观性特点，感悟思