

高中数学建模教学的设计与实践

——以“生活中的三角函数”为例*

金晓晖

(上海市松江二中,上海 201600)

1 引言

本文围绕着“生活中的三角函数”这一主题,以数学建模流程为主线,谈谈高中数学建模教学的设计.本次教学共两个课时,包含两个具有阶梯性的数学建模活动,其中第一个活动指向数学建模素养的水平二,第二个活动指向数学建模素养的水平三(水平的划分和课程标准一致).首先,根据潮汐曲线图的特征,教师引导学生选择三角函数模型进行拟合,让学生体验数学建模的过程,用数学的语言表达世界.随后,教师通过学生活动,引导学生利用类比论证说明声音的传播也可以用三角函数模型刻画,介绍用三角函数模型刻画纯音和乐器的振动,让学生尝试解决一个实际问题“如何利用音叉给钢琴调音”,再次让学生体验数学建模,用数学的思维思考世界.

2 教学实践

2.1 数学建模活动1:潮汐的函数模拟

2.1.1 实际情境

东汉时期王充在他所著的《论衡》一书中指出:“涛之起也,随月升衰.”当时,古人观察到海水水面会发生周期性涨落现象,并且该现象与月亮有关.现在我们知道这种现象是在月亮和太阳的引力作用下产生的潮汐.一般早潮叫潮,晚潮叫汐.潮汐高度的变化决定了港口船舶停泊、装卸货物、上下旅客等具体时间.下面是某港有一条记录的潮汐高度(cm)与相应时间(h)的记录简表(见表1)和潮汐曲线图(如图1).

表1 潮汐高度(cm)与相应时间(h)的记录简表

时间/h	$1\frac{13}{20}$	$8\frac{19}{30}$	$13\frac{53}{60}$	$20\frac{7}{10}$
潮汐高度/cm	478	112	461	116

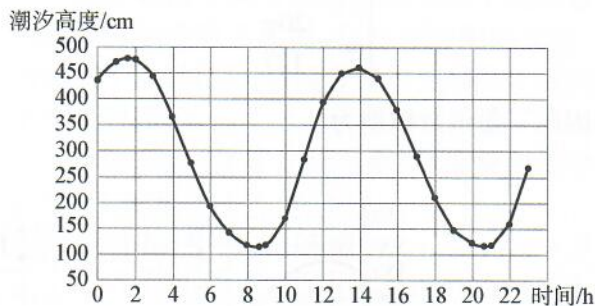


图1 潮汐曲线图

设计意图:在第一个数学建模活动中,选择学生熟悉的潮汐现象作为学习起点,给学生创设贴近生活的情境,提供真实的数据,引发学生的兴趣.

2.1.2 提出问题

请根据以上数据,选择合适的函数模型,写出潮汐高度 y (cm)关于时间 t (h)的函数近似表示式.

2.1.3 建立模型

通过观察潮汐曲线图的形状,推测函数模型为三角函数,所以设三角函数模型为 $y = A\sin(\omega t + \varphi) + B$ ($A > 0, \omega > 0$).

设计意图:通过抓住潮汐曲线图此起彼伏的特征,从数学的视角选择具有周期性的三角函数模型拟合潮汐曲线,让学生经历构建数学模型的过程.

* 本文系上海市一般课题《指向高中数学核心素养的“单元统整”教学实践研究》的阶段研究成果.

2.1.4 求解模型

根据表1中的数据,可得

$$\begin{cases} y_{\max} = \frac{478 + 461}{2} = 469.5 = A + B, \\ y_{\min} = \frac{112 + 116}{2} = 114 = A - B, \\ \frac{T}{2} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{20 \cdot \frac{7}{10} - 1 \cdot \frac{13}{20}}{3} = \frac{127}{20}, \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} A = \frac{711}{4}, \\ B = \frac{1167}{4}, \\ \omega = \frac{20\pi}{127}, \end{cases}$$

因此三角函数模型为

$$y = \frac{711}{4} \sin\left(\frac{20\pi}{127}t + \varphi\right) + \frac{1167}{4},$$

将 $\left(1 \frac{13}{20}, 469.5\right)$ 代入, 解得 $\varphi = \frac{81\pi}{254}$, 所以函数模型为

$$y = \frac{711}{4} \sin\left(\frac{20\pi}{127}t + \frac{81\pi}{254}\right) + \frac{1167}{4} (t \geq 0).$$

设计意图:在函数拟合中,启发学生想到处理数据的基本方法,计算函数最值的平均值,处理图像上最高点和最低点之间的水平距离,从而求得参数 A 、 ω 、 φ 和 B 合适的值,求解三角函数模型. 以上是处理数据的一种方法,学生也许会提出其他想法,根据检验结果评价模型的优劣.

2.1.5 检验模型

利用几何画板做出所求的函数图像(见图2),对照图1观察函数模拟的准确程度.

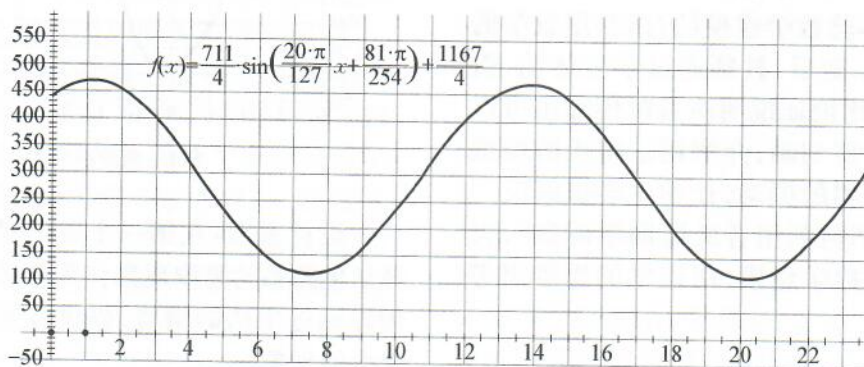


图2

设计意图:用几何画板做出所求出的三角函数的图像,比对三角函数图像与潮汐曲线图之间的差异. 如果差异过大,就需要再次建模,让学生理解数学模型是需要反复检验和修正的. 同时,让学生感受到在数学建模中信息技术可以解决很多问题,培养学生的信息意识.

2.2 数学建模活动2: 声音中的三角函数

2.2.1 实际情境

学生活动:打开手机的录音功能,一边说话,一边观察手机上的图形(如图3).

类比潮汐的函数模拟,可以用三角函数刻画声音. 所以,我们用三角函数 $y = A \sin(\omega t + \varphi)$ 来刻画音叉发出的纯音振动,其中 t 表示时



图3

间, y 表示纯音振动时音叉的位移, $\frac{|\omega|}{2\pi}$ 表示纯音振动的频率(对应音高), A 表示纯音振动的振幅(对应响度).

利用几何画板可以听到三角函数 $y = \sin(528\pi t)$ (中音 Do) 的声音. 如表2所示,七音阶就是把一组乐音按音调由低到高排列而

成的音阶,他们都可以用三角函数模型表示.因此,我们完全可以用几何画板演奏乐曲,一

起欣赏聆听用几何画板制作的歌曲《小星星》.随后,播放一段钢琴调音的视频.

表2 七音阶分别对应的频率和圆频率

唱名	中 音						
	Do	Re	Mi	Fa	Sol	La	Si
f (频率)	264	297	330	352	396	440	495
ω (圆频率)	528π	594π	660π	704π	792π	880π	990π
三角函数	$y = \sin 528\pi t$	$y = \sin 594\pi t$	$y = \sin 660\pi t$	$y = \sin 704\pi t$	$y = \sin 792\pi t$	$y = \sin 880\pi t$	$y = \sin 990\pi t$

设计意图:通过活动引发学生思考,将声音可视化,让学生直观感受到声音的形状,类比数学建模活动1用三角函数刻画声音.随后,教师介绍音叉发出的纯音振动的确可以用函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 刻画,向学生展示七音阶的三角函数模型,并用几何画板模拟Do的声音,为数学建模活动2提供知识基础.通过欣赏几何画板制作的歌曲《小星星》,让学生聆听三角函数,发现函数并不是冷冰冰的数学符号,而是灵动的乐章,体会数学与音乐的融合,感受数学美.

2.2.2 提出问题

当我们要用标准音叉调准钢琴某个键的发音时,我们根据什么样的声音,能够判断调音成功?

设计意图:根据真实的问题情境,让学生利用刚刚所接触的乐理科普知识尝试解决问题,思考如何用数学解释实际规律.

2.2.3 建立模型

学生活动1:分析问题,寻找其中的数学因素.

标准音叉的发音和钢琴某个键的发音都可以用三角函数表示.发音牵涉到响度(振幅),音调(频率),音色.关键因素为音调(频率).

设计意图:通过小组讨论,寻找问题中的数学因素,以便下一步提出模型假设.在寻找数学因素中,让学生聚焦于决定性因素,以便学生提出模型假设,建立较为简洁的数学模型.

学生活动2:(模型假设)当我们把所提出的现实问题变为数学问题时,必然要做出一些假设,写出模型假设.

假设1:某个标准音叉发出的纯音振动用三角函数表达为 $y = A_1\sin(\omega_1 t + \varphi_1)$ ($t \geq 0$);钢琴某个键发出的振动用三角函数表达为 $y = A_2\sin(\omega_2 t + \varphi_2)$ ($t \geq 0$).

假设2:由于调音是希望钢琴某个键的音的频率与标准音叉相同,与两者的振幅无关.所以为了方便起见,假设音叉与钢琴某个键的振幅相同,即 $A_1 = A_2 = A$.

学生活动3:(建立数学模型)抽象出数学问题,并求解.

研究两个三角函数 $y = A\sin(\omega_1 t + \varphi_1)$ ($t \geq 0$)和 $y = A\sin(\omega_2 t + \varphi_2)$ ($t \geq 0$)的和,探索当 $\omega_1 \neq \omega_2$ 和 $\omega_1 = \omega_2$ 时,他们所发出的声音分别具备怎么样的特征?

设计意图:在建立数学模型中,为了突破难点,将其拆分为3个学生活动.学生活动1是先让学生分析问题,寻找其中的数学因素,发现标准音叉和钢琴某个键的发音用三角函数表示,关键因素为音调(频率).目的是让学生聚焦于决定性因素,以便学生提出模型假设.学生活动2是提出模型假设,让学生把握住研究对象的主要数学特征,用准确的数学语言表述,以便后续解决问题.学生活动3是让学生根据模型假设,将实际问题转化为数学问题,用数学的思维分析问题.

2.2.4 求解模型

在求解模型时,应用和差化积公式化简,可得 $y = A\sin(\omega_1 t + \varphi_1) + A\sin(\omega_2 t + \varphi_2) = 2A\sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right)\cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right)$.

利用信息技术,继续用几何画板模拟,调整 ω_1 、 ω_2 的数值,发现当 $\omega_1 \neq \omega_2$ 时,它的函数图像如图4所示,能发出时响时轻的拍音.

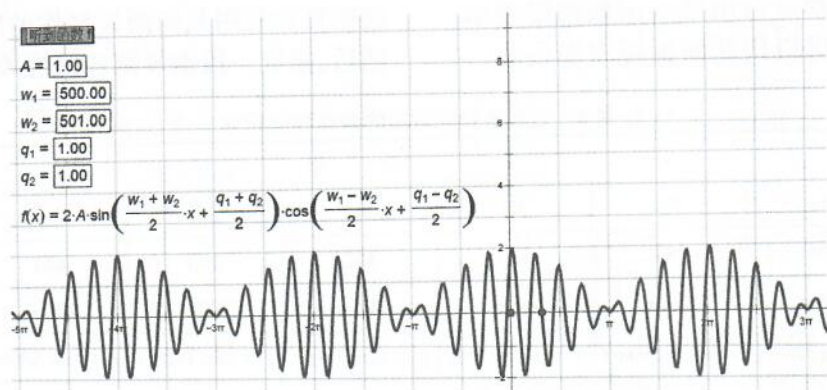


图4

当 $\omega_1 = \omega_2$ 时, $y = 2A \cos\left(\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right) \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right)$, 发出的声音是稳定的.

设计意图:在求解模型时,先利用信息技术,从直观角度感受 ω_1 、 ω_2 数值变化对函数产生的影响;再应用三角公式对函数进行化简,从数的角度解释所产生的影响.

2.2.5 检验结果

当我们用标准音叉调准了钢琴某个键的发音时,当听不到时响时轻的拍音时,就能判断调音成功,和调音师的操作相一致.

设计意图:教师引导学生将数学模型求解结果翻译成原问题的答案,指出所得到的结果与调音师的实际操作相一致,成功找到了钢琴调音的原理.

2.3 课堂小结

设计意图:在课堂小结中,再次指出建模的一般流程,让学生总结三角函数模型可以刻画事物(潮汐、声音)的周期变化(如图5),认识到数学模型在实际生活中的应用.

2.4 作业布置

必做:小组合作,挑选“潮汐的函数模拟”和“声音中的三角函数”中的一个主题撰写研究报告或小论文.

选做:(1)乐器产生的音并不是纯音,而是各种纯音的和,其中分为基音和泛音,可以写成 $y = A_0 + A_1 \sin(\omega t + \varphi) + A_2 \sin(2\omega t + \varphi) + A_3 \sin(3\omega t + \varphi) + \dots$, 请自行查阅相关知识,优化数学模型2;(2)利用几何画板,演奏属于自

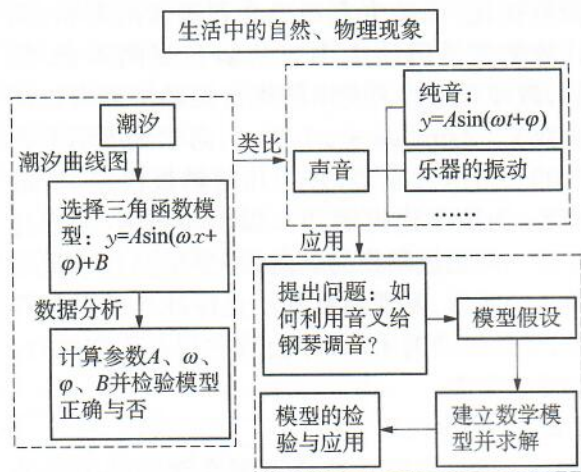


图5

己的歌曲;(3)尝试用三角函数刻画生活中其他的周期现象.

设计意图:作业设计中分为必做和选做,选做中的作业(1)给学生提供了优化数学模型的思路,希望学生能进一步完善数学模型;作业(2)和(3)给学生提供了进一步探究的空间.

3 几点思考

3.1 选取真实合理的情境,支持跨学科融合

有意义的数学建模活动需要教师提供真实的情境,对实际生活中的问题起到指导作用,引领学生创造个人或社会价值.例如,在潮汐的函数模拟中提供真实数据,展现数学建模活动在水运上的作用,保证了船舶的安全进出和停泊.由于真实情境的复杂性和真实性,学生经常需要跨学科知识来开展研究.例如,在声音中的三角函数中,关于钢琴调音原理解释需要数学和音乐相融合.因此,在数学建模活动中,我们不能局限于数学知识,而是要融合

学困生的一种奇思怪想:善意推论

——初中数学分叉研究之五

傅琳¹ 梁珍¹ 陆佳² 陈永明³

(1. 上海市紫阳中学,上海 200231; 2. 上海市第二初级中学,上海 200031;
3. 上海市徐汇区教育学院,上海 200032)

张奠宙教授在《千千万万的数学教师肩负着国际声誉》一文中,提出了十点深深忧虑和思考的问题,其中有一点说:“数学后进生也有数学思维,希望有人喝彩。”又说:“我们不应该指责这些学生,而应该从表面的和谐引向真正的美好。”^[1]

就初中数学分叉研究这个课题,我们团队发表过四篇文章,都是研究知识方面的学困

点,本文角度与前不同,研究学困生的思维. 这个问题与数学分叉还是有关系的.

我们收集过学困生的好多错误的例子,泛泛而谈地归纳几条当然也是可能的,但是这有人云亦云之嫌,价值也不大. 学困生的思维比较独特,有时有点怪异,可以谓之奇思怪想. 我们也不敢全面论述学困生的思维缺陷,在学困生的种种奇思怪想中,我们隐隐约约发现有一

~~~~~  
多学科的知识,鼓励学生进行学科交叉,感受数学、科学、艺术、技术、工程与社会的相互渗透.

### 3.2 设置层层递进的学生活动,提供充足的探究时间

数学建模需要让学生从问题源头进行思考,探索其背后的本质原因,在探究中主动获取知识、应用知识和解决问题. 数学建模的过程是艰难且复杂的,在教学中可以设计层层递进的学生活动,给学生铺设台阶,逐个击破. 例如,在声音中的三角函数中,设置了四个学生活动,引导学生从感性认识上升到理性认识,逐步将实际问题抽象为数学模型. 由于数学建模需要大量的思考时间,教师可以采取两节课连上的形式,让学生有充足的时间探究,体验科学研究的方法,养成科学的思维方式,领悟科学观点和科学精神.

### 3.3 鼓励小组合作,尊重活动成果

在数学建模活动中,以小组合作的学习方式开展,让学生在小组学习的氛围中思考和讨论,找到解决问题的路径,增强学生的集体意识,提高学生的学习积极性,发挥个体的主观

能动性. 例如,在本次的数学建模教学中,根据强弱搭配和男女搭配的分组原则,将班级学生共分为八组,每组5—6人. 在小组合作中,有些同学在潮汐的函数模拟中采取其他处理数据的方案,获得了恰当的函数模型. 因此,教师应该尊重学生思考的成果和解决问题的路径,支持他们实施各式各样的想法,从而获取真实的活动经验. 即使是失败的活动经验也是数学建模的一种体验,更展现了科学研究中的试错精神.

### 参考文献

[1] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017年版)[S]. 北京:人民教育出版社,2018:5-6.

[2] 孙晓红,刘美玲. “生活中的三角函数”教学实录[J]. 理科考试研究,2021,28(5): 27-31.

[3] 陆桂菊. 声音中的正弦函数(高一、高二、高三)[J]. 数理天地(高中版),2003(4): 44.

[4] 何志奇. 此时无声胜有声——赏析音乐与三角函数[J]. 新世纪智能,2019(85): 16-18.