颗粒堆积物在不同堆放方式下的占空比和 分形维数的计算

蔡绍洪^{1,2},周海平¹,王春香¹

(1.贵州大学物理系,贵州 贵阳 550025;2.贵州财经学院,贵州 贵阳 550004)

摘 要通过计算机编程模拟了在二维体系下颗粒堆积物规则堆积、交错堆积、随机堆积、混合堆积的过程, 计算了不同堆放方式下颗粒堆积物的占空比 *k* 及分形维数 *d*. 我们发现颗粒物质的占空比 *k* 及分形维数 *d* 与堆 积方式和颗粒大小有关. 关键词:颗粒物质;分形维数;计算机模拟

大健问:"秋松初贝;刀形组数;竹异竹(疾:

中图分类号 004-39 文献标识码 A 文章编号 1003-6563(2007)01-0009-04

THE CACULATION OF FRACTAL DIMENSION OF GRANULAR MATERIAL PILED IN DIFFERENT FORM

CAIS have hong^{1,2}, ZHOU Hai-ping¹, WANG Chun-xiang

(1. Department of Physics, Guizhou University, Guiyang 550025, China; 2. Guizhou College of Finance and Economics, Guiyang 550004, China)

ABSTRACT We simulated four different piling processes of granular materials in two-dimensional system : regular, interlaced, random and mixed piling. At the same time, we calculated the packing fraction k and fractal dimension d. We find k and d have relations to the size of granular and packing mode.

KEY WORDS granular material; fractal dimension; computer simulation

1 引言

颗粒物质已成为当前物理学家研究的热点问题 之一,人们正在从不同角度使用理论计算、计算机模 拟和科学实验等各种方式研究颗粒物质的各种性 质.颗粒堆积物的稳定性是颗粒物质研究中的一个 重要问题.目前已有不少学者从各种角度研究了颗 粒堆积物的稳定性^(1~4),并且有人研究了颗粒堆积 物的占空比与其稳定性之间的关系⁽²⁾,并得出只有 当占空比 k 小于 0.52 时自由堆积的沙堆才会处于 稳定状态^[2].事实上,对于三维系统,堆积物的最大 占空比也只能达到 0.64^[3].另外还有人指出,自由 紧密堆积的颗粒堆积物一旦形成便会处于相对稳定 状态,并且这种状态能够长期维持,并把这种现象称 为成拱现象^[3].

因为空占比与颗粒物质的稳定性有关,人们在 研究颗粒物质的性质时常常把空占比作为一个重要 的参数对待.因此我们希望能够找到与颗粒物质占 空比有关的因素,作为探索性的研究,本文通过计算 机编程模拟了在二维体系下,颗粒堆积物规则堆积、 交错堆积、随机堆积和混合堆积的过程,并分别计算

收稿日期:2005-11-17

基金项目:国家自然科学基金(批准号:10347003),贵州省科学技术基金(批准号:20043017),贵州省省长基金资助项目. 作者简介:蔡绍洪(1958-),男,贵州大学物理系教授,博士生导师;E-mail: aa.shcai@.gzu.edu.cn周海平(1978-),男,贵州大学在读研究 生,研究方向:颗粒物质,E-mail: hpzhou2885@sina.com.cn 了颗粒物质在这四种堆放方式下的占空比及分形维数,我们发现颗粒物质的占空比和分形维数跟堆积 方式和颗粒大小有关,而且分形维数与占空比的变 化趋势相同.

2 分形维数和占空比

2.1 分形维数

测量一个维数为 *d* 的物体的大小所得数值 *M* 与测量所用长度单位 有关,此关系可以表示为 *M* () 1/ ^{*d*},如通常计算线长(*d*=1)、面积(*d*=2)和 体积(*d*=3)的数值时 *M*()分别与 1/, 1/ ², 1/ ³ 成 正比.把上式写成等式就是 *M*() = $V/^{d}$,式中常数 *V* 是 =1 时测量该物体大小所得数值. 对该式两边 取对数得 *d*=1n*M*-1n*V*/ln(1/)

当 0时 ln*M*,于是得到关于维数 d 的定 义式:

$$d = \lim_{n \to \infty} \ln M() / \ln(1/) \tag{1}$$

上式定义的维数称为容量维数或豪斯道夫维数.

在实际计算时,可将相空间或其投影分成边长的小格,然后数被测物穿过或覆盖的小格的数目 *M*,计算 ln*M*/ln⁻¹,的值越小,计算值越准确.这 种方法称为计数盒方法.

2.2 占空比

设在体积为 V 的容器中堆积体积为 V_i(i=1, 2,3...,n)的颗粒,则占空比

$$k = \prod_{i=1}^{n} V_i / V \tag{2}$$

3 模拟与计算

为了模拟的方便,同时考虑到计算机的运行速度,我们选择二维体系进行研究,在规格为 200 * 200 网格的平面区域内堆积半径为 r 的小圆面,堆积方式分为规则堆积、交错堆积、随机堆积和混合堆积,然后分别计算不同堆积方式下堆积物的分形维数和占空比.

3.1 规则堆积

堆积方式如图 1 所示,每排圆面都堆积在其下 面一排圆面的正上方.我们用计数盒方法计算其分 形维数,利用公式(2)计算空占比,算得其占空比为 0.785,分形维数为 1.960,用不同大小的颗粒分别 模拟,发现其占空比和分形维数不变,这一点我们 可以从理论上进行证明。

设容器边长为 L,颗粒半径为 r,每排可放 n个颗粒,总共可放 n^2 个颗粒,其中 n = L/(2r)

则占空比 $k = r^2 n^2 / L^2$,将 n = L/(2r)代入得 k = /4 = 0.785,这说明占空比与颗粒半径无关.



3.2 交错堆积

堆积方式如图 2 所示,每排圆面都交错的堆积 在其下面的一排圆面上.模拟结果如图 5 和图 6 所 示,其占空比和分形维数都随着颗粒半径的增大有 减小的趋势,这种减小的趋势是由于边界效应所引 起的,设容器边长为 L,颗粒半径为 r,当 L/r 趋于 无穷大时,我们可以推得其占空比为 0.907.

推导过程如下:

设每排可以放 n 个颗粒,每两排之间的距离为 h,则总共可以放(L - 2r)/h + 1 排,

很容易得出:
$$r = L/(2n)$$
, $h = \sqrt{3}r$
占空比 $k = -r^2 n((L - 2r)/h + 1)/L^2$,
将 $r 与 h$ 消去得 $K = \frac{1}{2\sqrt{3}} - \frac{1}{2\sqrt{3}n} + \frac{1}{4n}$

当 *n* 时,
$$k = \frac{1}{2\sqrt{3}} = 0.907$$

这说明当颗粒大小相对于容器足够小时,其占 空比趋于 0. 907

3.3 随机堆积

堆积方式如图 3 所示,用大小相等的颗粒堆积 容器,每个颗粒的位置是随机产生的,由于每次堆积 的构型都是随机生成的,所以同种大小的颗粒两次 堆积的结果并不是一样的,但这种随机涨落的幅度

10

不是很大,计算结果如图 7 和图 8 所示,颗粒物质的 占空比和分形维数整体上随着颗粒半径的增加变化 不大.





Fig. 5 The trend of packing fraction changing with the granular radius in interlaced pile

3.4 混合堆积

堆积方式如图 4 所示,每个颗粒的位置和半径 都是随机产生的,我们将半径为 2-10 的颗粒随机混 合,算得其占空比为 1.936,分形维数为 0.682,显 然这种情况下,堆积物的占空比和分形维数比等大 小颗粒随机堆积的情形要大.



Fig. 6 The trend of fractal dimension changing with the granular radius in interlaced pile



图 7 在尺度为 200 * 200 的二维体中 随机堆积时占空比随颗粒半径的变化趋势

Fig. 7 The trend of packing fraction changing with the granular radius in random pile



图 8 在尺度为 200 * 200 的二维体中 随机堆积时分形维数随颗粒半径的变化趋势 Fig. 8 The trend of fractal dimension changing



4 结论

我们对模拟的结果进行分析,得出以下结论:

(1)对于图 1 所示的规则堆积来说,其分形维数 与占空比跟颗粒的半径 r 无关,这一点从理论上也 很容易证明,同时也说明这种堆积方式的分形维数 和占空比具有一定的普适性.

(2) 由图 5 和图 6 可以看出,对于如图 2 所示的 交错堆积来说,由于受边界效应的影响其分形维数 和占空比都随着颗粒半径的增大而减小.由理论推导得知,当容器的边长远大于颗粒半径时,其占空比 将趋于 0.907.

(3) 由图 7 和图 8 可以看出,对于随机堆积来 说,用大小相等的颗粒堆积容器,每个颗粒的位置是 随机产生的,由于每次堆积的构型都是随机生成的, 所以同种大小的颗粒两次堆积的结果并不是一样 的,但这种随机涨落的幅度不是很大,计算结果如图 7 和图 8 所示,颗粒物质的占空比和分形维数整体 上随着颗粒半径的增加变化不大.

(4) 对于不同大小的颗粒混合堆积的情形,其分 形维数和占空比要比大小相等的颗粒堆积物的分形 维数和占空比要大得多.这对现实生活中在货物集 装时如何充分利用有效空间有着现实的指导作用.

(5) 另外, 从图 5、图 6 和图 7、图 8 可以看出, 堆 积物的分形维数随颗粒半径变化的趋势和占空比随 颗粒半径变化的趋势相同, 这说明分形维数与占空 比之间存在着某种内在的联系.

以上结果对于我们进一步深入的研究各种各类 不同堆积物的占空比、分形维数及其稳定性的关系 有重要参考价值.

参考文献

- Massalska Arodz M, Mayer J, Bran kowski J, et al. Experimental observations of structural relaxation in granular matter (J). Phys. Rev. E, 1997,55:1225 -1227
- Barker G C and Anita Mehta, Vibrated powders: Structure, correlations, and dynamics (J). Phys. Rev. A 1992,45:3435 - 3446
- Duran J ,Rajchenbach J and Clement E. Arching effect model for particle size segregation (J). Phys. Rev. Lett. 1993,70: 2431 - 2434
- [4] 李朝辉,蔡绍洪,唐芙蓉.颗粒聚集体的崩塌性质研究
 [J].贵州大学学报,2005,22(1):18~23
- [5] Bastien Chopard, Michel Droz,祝玉学,赵学龙译.物 理系统的元胞自动机模拟 [M].北京:清华大学出版 社,2003
- [6] 张建树. 混沌生物学 [M]. 西安:陕西科学技术出版 社,1998