基于“问题解决”的高中数学教学实践与思考
——以“向量基本定理”为例

杨　颖
（同济大学第二附属中学，上海　200060）

基于“问题解决”的课堂教学是一种以问题为核心的有效、科学的课堂教学，是能够使师生在“提出问题—讨论分析问题—探究解决问题—引发新问题”的紧张而热烈的螺旋式递进氛围中进行交流和学习的教学活动. 这种课堂教学模式具有以下益处：激活学生思维，调动学生学习积极性；促进学生间讨论交流，形成合作意识；培养学生探究能力；促进教学相长，推动教师专业发展[1].《普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订)》也指出：“通过高中数学课程的学习，提高从数学角度发现和提出问题的能力，分析和解决问题的能力(简称‘四能’)”[2]，可见在数学教学中，教师应重视培养学生问题解决的能力.

本文以沪教版普通高中教科书数学必修第二册第八章第三节第一小节“向量基本定理”为例，基于课标、教材、学情，探讨基于“问题解决”的课堂教学模式，谈谈一些做法和思考.

1　教学要素分析

向量的优势在于沟通几何与代数的联系，其中向量的坐标表示是连接两者的一个关键，要建立坐标系，就要确定任意一个向量在一个基上能进行唯一分解，这是平面直角坐标系下的坐标的理论依据和逻辑基础，即向量基本定理.

向量基本定理讨论的问题是：把平面向量写成两个给定的不平行向量的线性组合. 该定理是沟通数和形的桥梁，是连接“一维空间”和“三维空间”的纽带.

向量的运算系统与数的运算不同，对学生而言是对运算认识的飞跃. 在该学习内容之前，知识方面，学生已经学习了向量的加减法、实数与向量的乘法、线性运算，对向量及其运算的几何意义也有了一定的认识，此外，在物理中也学习了向量的分解. 思想方法方面，学生在之前的学习中多次接触过数形结合、从特殊到一般等数学思想方法，以上都为学生学习本节课奠定了良好基础.

2　教学实践

笔者通过学校的研修活动，历经“备课，试讲，公开课，评课”等环节，在课堂的情境引入、探究新知、完善新知、应用新知等阶段，采用设计“问题链”的策略，进行“问题解决”模式下的教学实践，学生通过探究，解决这些层层递进的问题，在解决问题的过程中，深刻认知知识是如何形成的，高中数学的教学质量以及教学效率得到进一步提高[3].

2.1　情境引入阶段，问题的设计应能激发学生的学习兴趣

播放微视频：同学们，你们知道帆船运动吗？请观看无动力帆船逆风航行的物理实验.

问题 1　帆船为什么能逆风航行？

分析：课堂伊始，观看无动力帆船逆风航行的物理实验，学科融合，激趣设疑. 帆船的运动和它受到的力有关，物理中我们通过力的分解来研究. 力的分解与合成在物理学习中已经接触过，从学生已有的知识和经验出发设计问题，激发学生学习的兴趣，增强探究的信心，提高课堂参与的积极性，学生还能从中感受到为什么要学习向量基本定理，了解到数学对于日常生活所具备的实用性和工具性，体会到数学与其他学科的联系.

2.2　探究新知阶段，问题的设计应能激发学生的探究欲望

问题 2　我们先回顾一下向量和，如图 1，已知向量 $\overrightarrow{e_1}$ 与 $\overrightarrow{e_2}$，求作向量 $3\overrightarrow{e_1}+2\overrightarrow{e_2}$？

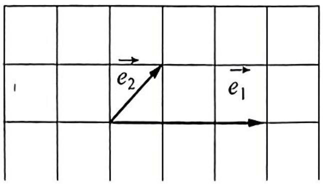
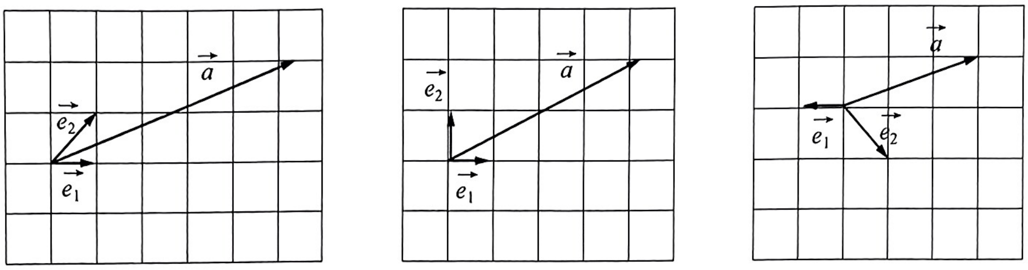


图 1

问题 3　作向量和的依据是什么?

学生活动:学生完成作图,阐明作图依据.

问题 4　如图 2,能否把平面内的任一向量 $\vec{a}$ 分解到两个向量 $\vec{e_1}$ 与 $\vec{e_2}$ 的方向上.



$\vec{a}=$__$\vec{e_1}+$__$\vec{e_2}$　　$\vec{a}=$__$\vec{e_1}+$__$\vec{e_2}$　　$\vec{a}=$__$\vec{e_1}+$__$\vec{e_2}$

图 2

学生活动:动手操作,小组交流,展示成果.

问题 5　由问题 4,我们可以猜想,对于平面上任意一个给定的向量 $\vec{a}$,是否都可以表示为这两个向量 $\vec{e_1}$ 与 $\vec{e_2}$ 的线性组合?

分析:笔者通过问题 3 的设置,激活学生原有知识体系中的平行四边形法则、三角形法则、非零向量平行的充要条件等知识,让学生可以依托这些现有知识,完成作图,通过问题 4 的设置,让学生在作图的过程中,体会到教师所给的三个向量 $\vec{a}$ 都能表示成 $\lambda\vec{e_1}+\mu\vec{e_2}$ 的形式,而且,所有同学给出的 λ、μ 都是一样的. 这样从特殊到一般,随着问题 5 的提出,学生自然能完成定理的初步猜想,在此过程中,发展学生数学抽象、逻辑推理等核心素养.

2.3　完善新知阶段,问题的设计应能深化学生的理解

问题 6　我们的猜想正确吗? 这个关系式中的量有没有什么限制条件?

(1) 对于向量 $\vec{e_1}$ 与 $\vec{e_2}$,有无条件限制?

追问:若 $\vec{e_1}\,/\!/\,\vec{e_2}$,大家试试看 $\vec{a}$ 是否还能通过 $\vec{e_1}$ 和 $\vec{e_2}$ 表示出来? 若 $\vec{e_1}$ 和 $\vec{e_2}$ 中有 $\vec{0}$ 呢?

(2) 对于平面内的所有向量 $\vec{a}$ 是不是都能分解到这两个不平行的向量 $\vec{e_1}$ 和 $\vec{e_2}$ 方向上?

(3) 当 $\vec{e_1}$ 和 $\vec{e_2}$ 及 $\vec{a}$ 确定的情况下,实数 λ、μ 是唯一的吗?

问题 7　你能根据上述探究结果,完善刚才的猜想吗?

问题 8　你能证明猜想吗? 要从哪几个方面证明?

分析:这一教学环节的任务是学生能完善并证明猜想,这个过程对学生思维的严谨性、广度和深度都提出了更高的要求,笔者在这里设置了 6、7、8 三个问题.

问题 6 教师借助几何画板,动态展示向量 $\vec{a}$ 在不同情形下能否以及如何通过构造平行四边形来表示,通过教师演示、引导,使学生在观察中发现猜想的不足之处,体会数学的严谨性,培养学生直观想象的核心素养. 需要指出的是,问题 6(1) 的追问问题,教师不宜直接抛出结果,要给学生留有自主发现、自主思考的空间,在笔者实际的教学实践中,教师通过拖动几何画板中的元素,学生是可以观察发现向量 $\vec{e_1}$ 和 $\vec{e_2}$ 的限制条件的.

此外,问题 6 的思考过程,也能让学生感受到向量基本定理的存在性和唯一性,为问题 8 的证明预热. 问题 7 是问题 1—6 的"成果展示",教师应尽可能地让学生来总结,增强学生归纳总结、数学表达的能力,使学生获得成功的体验. 问题 8,向量基本定理的证明过程较抽象,但通过回答"要从哪几个方面证明",学生有了证明的大致方向. 事实上,在实际的课堂实践中,结合问题 6 的探究,少部分学生可以完成"存在性"的证明,但是,"唯一性"的证明,基本由教师讲授.

2.4　应用新知阶段，问题的设计应难易得当，有代表性

问题 9　判断以下说法是否正确，并说明理由：

(1) 平面内存在一对垂直的向量 $\vec{i}$ 与 $\vec{j}$ 可以表示该平面内所有向量.

(2) 如果 $\overrightarrow{e_1}$ 与 $\overrightarrow{e_2}$ 是同一平面内的两个不平行向量，那么对于这一平面内的向量 $\vec{0}$，不存在实数 λ、μ，使 $\vec{0}=\lambda\overrightarrow{e_1}+\mu\overrightarrow{e_2}$.

问题 10　已知 $\overrightarrow{e_1}$ 与 $\overrightarrow{e_2}$ 是平面内的两个不平行向量，求 λ、μ.

(1) 若 $\vec{a}\,/\!/\overrightarrow{e_1}$，且 $\vec{a}=\lambda\overrightarrow{e_1}+\mu\overrightarrow{e_2}$.

(2) 若 $\vec{a}\,/\!/\overrightarrow{e_2}$，且 $\vec{a}=\lambda\overrightarrow{e_1}+\mu\overrightarrow{e_2}$.

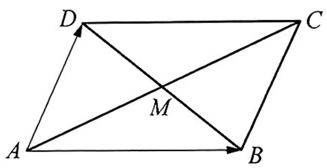


图 3

问题 11　如图 3，在平行四边形 $ABCD$ 中，两条对角线的交点是 M，设 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$. 试用 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的线性组合分别表示 $\overrightarrow{AM}$、$\overrightarrow{MC}$、$\overrightarrow{MB}$、$\overrightarrow{MD}$.

变式 1：设 $\overrightarrow{AC}$ 为 $\vec{c}$，$\overrightarrow{BD}$ 为 $\vec{d}$，请用基 $\vec{c}$ 与 $\vec{d}$ 表示 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{AD}$.

分析：学完定理，教师要让学生知道“怎么用”. 例题的选取应符合学生的认知规律，由浅到深、由简单到复杂、循序渐进，抓紧知识点间的内在联系，例题间要环环相扣，逐步渗透数学思想方法[5]. 如前文所言，本节课的教学重难点是向量基本定理的证明，因此，笔者在选择例题时，不追求难度，更注重例题的代表性.

通过问题 9 深化对定理的理解，让学生经历、感受基的选择任意性；通过问题 10 特殊向量的分解，巩固对定理存在性和唯一性的理解；通过问题 11，学生学会解决此类题型的一般思路和程式.

3　感悟与反思

基于“问题解决”的教学模式，以“问题”为载体进行教学，对学生来说是一种学习方式，对教师来说也是一种教学方式[6]，在这样的模式下，学生和教师都能获得成长.

对学生而言，本节课学生完整经历了向量基本定理的“探究、发现、完善、证明、应用”等过程，在每个环节学生都是课堂的主体、知识的主动建构者，在解决教师所设置的“问题链”的过程中，学生能获得“如何学”数学的经验，提升自主学习的能力.

在解决问题的驱使下，学生有丰富的课堂体验，问题 1 中观看微视频，问题 2—4 中操作确认，问题 6 中直观感知，还有贯穿整节课的合作探究、语言表达等，这些体验将激发学生学习数学的兴趣，在学生心中燃起“想学数学”的火苗，在教师的教导下，学生会找到“会学数学”的方法，最终“爱学数学”.

对教师而言，基于“问题解决”的教学模式，对教师的专业水平提出了更高的要求，若想提高学生的问题解决能力，数学教师必须“自觉养成用数学的眼光发现和提出问题、用数学的思维分析和解决问题、用数学的语言表达和交流问题的习惯[1]”. 如何设计能真正激发学生兴趣、启发学生思考、促使学生把握知识本质、提高课堂有效性的问题，需要教师不断地探索、打磨、创新.

参考文献

[1] 中华民族共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订)[S]. 北京：人民教育出版社，2020.

[2] 高福如. 高中数学基于“问题解决”的课堂教学与设计[M]. 上海：华东师范大学出版社，2018.

[3] 张海叶. 高中数学教学的“问题链”设计研究[J]. 高考，2018(3)：143.

[4] 张颖. 以目标为导向的中学数学深度学习活动设计——以“数系的扩充和复数的概念”为例[J]. 数学教学，2021(2)：23 - 26.

[5] 邱小伟，曾昌涛，陈惠. 高中数学课型构建与实例分析——以《直线与圆的位置关系》为例[J]. 重庆工商大学学报(自然科学版)，2020，37(3)：107 - 114.

[6] 胡云飞. 促进核心素养发展的问题解决教学——以“向量的概念及表示”为例[J]. 数学通报，2022，61(3)：18 - 21.