大概念指导下对高中复数内容的拓展教学设计

李 明

(江苏省天一中学,214101)

摘 要:高中数学教材中的复数内容重在介绍复数的概念和运算法则,建立起复数与向量、多项式等内容的联系.在培养高中数学拔尖创新人才时,可以以大概念教学方式为指导,在复数的经典内容与时代作用上适当进行拓展,本文结合具体课程设计进行说明.

关键词:大概念;拔尖创新人才;复数;拓展;教学设计

一、教材分析

大概念教学有助于学生数学知识结构化,形成完整的知识体系[1].高中数学教材中的复数内容是几何与代数主线中的重要组成部分,教材中除介绍复数的概念及基本运算之外,着重于复数通过复平面与"点"、"向量"等几何概念的联系,体现了高中数学中几何与代数的密切联系.这样的内容安排,使"直观想象"与"数学运算"比较自然地有机融合起来[2],让核心素养的教学落到实处.

复分析在数学史及现代数学研究上起到了举足轻重的作用,现行高中教材中对于复数内容的安排仍有一些局限性,尤其是对于拔尖创新人才而言.学生在学习本单元内容后完全意识不到研究复数的价值,在复数引入的必要性上依旧停留在解方程上.以人教A版教材为例,笔者认为有两处内容不够全面.

1.经典内容的缺失

欧拉公式($e^{\pi i}=-1$)是复数研究中最为基础的结论,有很高的知名度(在某些场合被评为最优美的公式之一).有一种观点认为,全方面理解了欧拉公式,就对大学数学基础课中的数学分析学透了.受知识系统的局限性,高中生当然无法做到全面理解欧拉公式,但当学过高中数学后仍然没见过欧拉公式,不能不说是一种遗憾.

2.与现代数学研究缺少联系

对复数域与复变函数的研究带动了近现代数学的发展,其中著名的代数基本定理就是利用解析函数来证明的,在数学界引起轰动的黎曼假设也与之有关.高中数学中的复数内容缺少函数视角,也就与现代数学研究产生了断层.近些年,我国在数学领域取得了辉煌的成就,在国际中的影响力也在逐步提升.为了提升民众对数学研究成果的关注度,可以让更多的高中生了解前沿数学正在研究的问题.

二、大概念指导下的课程设计

在2023年江苏省数学冬令营中,笔者以人教A版教材为参考,以大概念教学方式为指导,面向全省部分高中数学拔尖创新人才,对复数内容进行适当的拓展.

1.大概念视角下的复数

在学习复数内容时,学生应当理解两个重要的数学概念:延拓与联系.复数是在保持实数运算规律的同时对实数的扩充,这正符合数学中"延拓"的概念,延拓后的数学概念必须要保持原有范围内的法则,同时也能解决新的问题.另一方面,复数与数学中许多重要研究对象有紧密的联系,通过教材中的内容,已经可以充分感受到复数与实数、多项式、平面向量、三角函数的联系.笔者在课程设计中作出拓展,展现复数与更多领域中的联系.比如复数的三角形式是复数与几何联系的桥梁,复数的欧拉形式是在复数域上建立函数关系的基础,将复数应用在数论中又能迸发出许多优美的结论.

2.课程设计

课时一:复数的表示与运算.

复数的三种表示:

(1)代数形式:$z=a+bi$,其中i为虚数单位,满足$i^2=-1$;$a=\mathrm{Re}(z)$,$b=\mathrm{Im}(z)$.

本文系江苏省教育科学"十四五"规划办重点课题《大概念视角下的高中数学单元整体教学实践研究》(课题编号:B/2021/02/28)与江苏省中小学教学研究第14期立项课题《高中数学拔尖创新人才的培养策略研究》(课题编号:2021JY14-XK16)的阶段性成果.

(2) 三角形式:$z=|z|(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$,其中$\theta=\operatorname{Arg}(z)$称为$z$的幅角,若$\theta\in[0,2\pi)$,则$\theta=\arg(z)$称为幅角主值.易知当$z\neq 0$时,$\operatorname{Arg}(z)=\arg(z)+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$;0的幅角是任意的.

(3) 欧拉形式:$z=\mathrm{e}^{r+\theta\mathrm{i}}$,转换为三角形式为$z=\mathrm{e}^{r}(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$.

复数的共轭运算与四则运算:详见教材.

例1 (2022年全国联赛A卷第4题)若复数z满足:$\dfrac{z-3\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}$为负实数,$\dfrac{z-3}{z+1}$为纯虚数,则$z$的值为________.

例2 (2021年全国联赛A卷第9题)已知复数列$\{z_n\}$满足:$z_1=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,$z_{n+1}=\overline{z_n}(1+z_n\mathrm{i})$,$n\geqslant 1$.求$z_{2021}$的值.

例3 解方程:$z^3=1+\sqrt{3}\mathrm{i}$.

复数的乘方与开方(棣莫弗公式):

$$[|z|(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)]^n=|z|^n(\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta);$$

形式上有$\sqrt[n]{|z|(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)}=\sqrt[n]{|z|}\cdot\left(\cos\dfrac{\theta+2k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\theta+2k\pi}{n}\right)$,$k=0,1,\cdots,n-1$(记号$\sqrt[n]{z}$表示方程$x^n=z$的所有复数根).

本课时首先承接教材内容,现行教材中的复数均以复数的代数形式以及四则运算、共轭运算为主,辅以诸如复数的三角形式等内容.笔者在此基础上介绍复数的欧拉形式,可以帮助学生了解欧拉公式,也对理解棣莫弗公式起到一定作用.例3的设计旨在揭示代数形式的局限性,所以自然而然引出用三角形式或者欧拉形式进行复数乘方与开方运算的合理性.

这一部分内容以延拓为重点,当实数集扩充到复数集上时,保留了原有的运算规律,但是也带来了新的问题,比如实数集中熟悉的开方运算是通过负与非负的分类来解决的,符号“$\sqrt{\ }$”也有准确的含义.但是,在复数集中,开方运算的对象扩大为所有“数”,运算的结果由开方次数决定,符号“$\sqrt[]{\ }$”也不能轻易使用了.实际上,复数的开方运算是一个多值函数,其含义是与高中数学中函数的定义违背的,但却是复变函数中的普遍概念.这样的教学过程可以帮助学生建立良好的逻辑素养,体现出数学在培养人的思维品质与理性精神上的重要作用.

课时二:单位根与复系数多项式.

韦达定理　复系数方程$c_nz^n+c_{n-1}z^{n-1}+\cdots+c_1z_1+c_0=0(c_0,c_1,\cdots,c_n\in\mathbf{C},c_n\neq 0,n\geqslant 1)$的$n$个根分别为$z_1,z_2,\cdots,z_n$,则$\sum\limits_{i=1}^{n}z_i=-\dfrac{c_{n-1}}{c_n}$,$\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}z_iz_j=\dfrac{c_{n-2}}{c_n}$,……,$\prod\limits_{i=1}^{n}z_i=(-1)^n\dfrac{c_0}{c_n}$.

单位根　方程$z^n-1=0$的所有根为$1,\cos\dfrac{2\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\dfrac{2\pi}{n},\cos\dfrac{4\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\dfrac{4\pi}{n},\cdots,\cos\dfrac{2(n-1)\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\dfrac{2(n-1)\pi}{n}$,称为$n$次单位根.记$\varepsilon_k=\cos\dfrac{2k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\dfrac{2k\pi}{n}(k=0,1,\cdots,n-1)$.当$(k,n)=1$时,称$\varepsilon_k$为本源单位根,则所有$n$次单位根可记作:$1,\varepsilon_k,\varepsilon_k^2,\cdots,\varepsilon_k^{n-1}$或$\varepsilon_k,\varepsilon_k^2,\cdots,\varepsilon_k^n$.

例1 (2021年北京大学夏令营试题改编)(1)已知z_1、z_2是单位根,且$|z_1+z_2|=1$,求证:z_1+z_2是单位根;

(2)已知z_1、z_2、z_3是单位根,且$|z_1+z_2+z_3|=1$,求证:$z_1+z_2+z_3$是单位根.

单位根的性质:(1)给定$n\geqslant 2$,则所有n次单位根的和为0.

$$(2)\ 1^m+\varepsilon_1^m+\varepsilon_2^m+\cdots+\varepsilon_{n-1}^m=\begin{cases}0, & n\nmid m,\\ n, & n\mid m.\end{cases}$$

例2 n为给定不小于2的正整数,求$\prod\limits_{k=1}^{n-1}\sin\left[\dfrac{n(k-1)+k}{n(n+1)}\pi\right]$的值.

代数基本定理　复系数多项式$f(z)=c_nz^n+c_{n-1}z^{n-1}+\cdots+c_1z_1+c_0(c_0,c_1,\cdots,c_n\in\mathbf{C},c_n\neq 0,n\geqslant 1)$在复数域内必有根.

例3 已知$f(z)=c_nz^n+c_{n-1}z^{n-1}+\cdots+c_0$为$n$次复系数多项式,证明:一定存在复数$z_0(|z_0|\leqslant 1)$,使得$|f(z_0)|\geqslant|c_0|+\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\dfrac{|c_k|}{\left[\dfrac{n}{k}\right]}$.

本课时承接上一课时中的棣莫弗公式,介绍了复数中颇具代表性的概念:单位根.在人教A版教材中,单位根作为阅读材料给出,但没有揭示单位根在数论中的作用.单位根性质丰富,应用广泛,笔者秉持适度原则,只给出最具代表性的有递进关系的两条性质,这两条性质与本源单位根的概念一定程度上也体现了复数与数论的联系.代数基本定理以现有知识证明起来有难度,不要求学生掌握.例3是一道综合问题,难度较大,可以选讲.

本课时着重培养学生的逻辑与抽象素养,培养面对新概念、新性质的理解、概括、应用能力,学习新

(下转第25页)

$S_{\triangle BCQ}:S_{\triangle CAQ}:S_{\triangle ABQ}=2:3:5$，

故可得 $S_{\triangle ABP}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABQ}$，所以 $PQ//AB$.

又 $S_{\triangle BCP}=\frac{1}{6}S_{\triangle ABC}$，$S_{\triangle BCQ}=\frac{1}{5}S_{\triangle ABC}$，过点 Q 作 $QM\perp BC$ 于 M，过点 P 作 $PN\perp BC$ 于点 N，过点 A 作 $AH\perp BC$ 于点 H，则 $QM=\frac{1}{5}AH$，$PN=\frac{1}{6}AH$. 过点 P 作 $PI\perp QM$ 于点 I，易证 $\triangle QPI\backsim\triangle ABH$，所以

$$\frac{PQ}{AB}=\frac{QI}{AH}=\frac{\frac{1}{5}AH-\frac{1}{6}AH}{AH}=\frac{1}{5}-\frac{1}{6}=\frac{1}{30},$$

故 $\frac{|\overrightarrow{PQ}|}{|\overrightarrow{AB}|}=\frac{1}{30}$.

点评　本题考查“奔驰定理”的推论和平面几何的有关知识，极富思考性和挑战性.

(收稿日期：2023－02－27)

(上接第17页)

知识最主要的方法就是要有足够多的例子，用具象来体现抽象，抽象反映到具象之中. 人教A版新教材对单位根的补充就强调3次单位根的形式、特性，再类比到4、5次单位根乃至 n 次单位根中.

课时三：复数与平面几何

三角不等式　对任意复数 $z_1,z_2,\cdots,z_n$，均有 $|z_1|+|z_2|+\cdots+|z_n|\geqslant|z_1+z_2+\cdots+z_n|$.

例1　(2019年全国联赛 A 卷第11题)称一个复数数列 $\{z_n\}$ 为“有趣的”，若 $|z_1|=1$，且对任意正整数 n，均有 $4z_{n+1}^2+2z_nz_{n+1}+z_n^2=0$. 求最大的常数 C，使得对一切有趣的数列 $\{z_n\}$ 及任意正整数 m，均有 $|z_1+z_2+\cdots+z_m|\geqslant C$.

三点共线的判定　复平面上三点 z_1、z_2、z_3 共线的充要条件是：存在不全为零的实数 x_1、x_2、x_3，且 $x_1+x_2+x_3=0$，使得 $x_1z_1+x_2z_2+x_3z_3=0$.

四点共圆的判定　复平面上四点 z_1、z_2、z_3、z_4 共圆的充要条件是：存在非零实数 λ，使得

$$\frac{z_3-z_1}{z_4-z_1}:\frac{z_3-z_2}{z_4-z_2}=\lambda.$$

例2　用复数法证明托勒密不等式.

三角形的面积　复平面上三点 z_1、z_2、z_3 围成的三角形的面积为 $\frac{\mathrm{i}}{4}\begin{vmatrix}1&1&1\\z_1&z_2&z_3\\\overline{z_1}&\overline{z_2}&\overline{z_3}\end{vmatrix}$.

本课时主要体现复数与平面几何的联系，突出展现数形结合的数学思想. 复数通过代数形式对应到复平面中的点，复数的模对应复平面中线段的长度. 这样的对应关系对学生而言难度不大，再利用数学归纳法自然可以得到三角不等式. 另一方面，代数也能引导对几何元素进行更深入的研究. 如果记 A、B、C 分别为复数 a,b,c 在复平面中对应的点，那么 $\mathrm{Arg}\frac{b-a}{c-a}$ 是否对应 $\angle BAC$ 的大小呢？事实上并非如此，比如 $\mathrm{Arg}\frac{b-a}{c-a}=-\mathrm{Arg}\frac{c-a}{b-a}$，但是 $\angle BAC=\angle CAB$. 所以必须对 $\angle BAC$ 加上方向概念，而且其方向一定要与复平面中辐角的定义方向一致(逆时针).

三、结语

高中数学课程面向全体学生，实现：人人都能获得良好的数学教育，不同的人在数学上得到不同的发展[3]. 在教育实践中发现，许多高中生立志在高校学习数学，为我国的基础学科建设做出贡献，笔者赞赏其志向的同时，也对他们未能充分体验数学、未能紧跟时代欣赏数学的魅力感到遗憾. 受教育规律所限，高中数学内容绝大部分停留在牛顿、莱布尼兹时期. 结合学生现状以及发展阶段，应当对一部分学生(比如拔尖创新人才)提供更丰富更全面的数学教学.

参考文献：

[1] 张阳. 大概念教学：数学知识结构化的有效路径[J]. 数学通讯，2022(12)：19-21＋37.
[2] 教育部基础教育课程教材专家工作委员会. 普通高中数学课程标准(2017年版2020年修订)解读[M]. 北京：高等教育出版社，2020：163.
[3] 中华人民共和国教育部. 普通高中课程标准(2017年版2020年修订)[M]. 北京：人民教育出版社，2020：2.

(收稿日期：2023－02－23)