从不同维度探析几何动态问题的解题策略

董成涛

(遵义师范学院附属实验学校,563400)

摘　要:近年各地中考对几何动态问题的探究越来越重视,本文以贵州省2024年九年级适应性考试16题为例,从几何模型、特殊点、解析几何等不同维度探析这类问题的解题策略,分析不同方法的优势与不足,为教师教学与中考复习提供参考,为学生解决这类问题提供比较系统的方法.

关键词:中考;几何动态问题;不同维度;解题策略

几何动态问题是考查学生问题分析能力与数学创新思维的有效途径,各地学业水平考试也选择几何动态问题作为数学的压轴题,这类问题对学生的能力要求较高,很多学生遇到相关题目往往不知道如何下手.这类问题的得分率往往不高,尤其对16题(填空题的压轴题)来说,没有小问题为最终要解决的问题作铺垫,学生在解题时找不到着手点,教师在教学中也没有好的方法,甚至部分教师觉得这类题目讲与不讲意义不大,最后学生都不能解决.从"学会思维"的理念出发,罗增儒教授曾说"解题教学是解题活动的教学"[1],而这类问题正是培养学生创新思维和问题分析能力的关键.通过文献检索,笔者发现对初中几何动态问题的研究较少.本文通过几个不同维度探析这类问题的解题策略,并通过变式对不同方法策略进行巩固和验证,让师生在解决这类问题时有明确的思考方向和不同的方法供选择.

1. 原题呈现

题1　如图1,O是矩形$ABCD$对角线的交点,点E在AD边上,连接OE,将线段OE绕着点O逆时针旋转90°得到线段OF(点F在矩形$ABCD$内部),连接AF,EF.若$AB=2$,$AD=4$,则$\triangle AEF$面积的最大值是________.

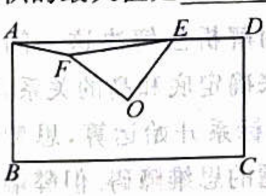

图1

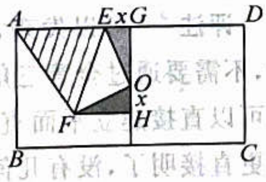

图2

这是一道以长方形和三角形为背景的几何动态问题,求解三角形面积的最大值,综合考察了四边形、三角形的性质、三角形全等模型、旋转与动态轨迹、函数的性质等.

初中阶段,解决几何动态问题的最值,常用思路有两种:一是确定几何动态最值问题的最值点(特殊点),即将动态的问题转化为静态的问题解决,降低学生思维难度;二是利用函数观念,设未知数建立函数模型,将几何最值问题转化为求函数的最值问题.

2. 解法探究

2.1 利用三角形全等模型求解

因为线段OE绕着点O逆时针旋转90°得到线段OF,所以$\triangle OEF$为等腰直角三角形,根据一线三等角模型,可过点O作$OG\perp AD$于G,过点F作$FH\perp OG$于H,构造出$\triangle OGE\cong\triangle FHO$.设$GE=OH=x$,

① 当点E在线段AG上时,如图2,$AE=AG-GE=2-x$,$h=GH=OG+OH=1+x$,所以

$$S_{\triangle AEF}=\frac{1}{2}AE\cdot h=\frac{1}{2}(2-x)(1+x)$$
$$=-\frac{1}{2}(x-\frac{1}{2})^2+\frac{9}{8},$$

当$x=\frac{1}{2}$时,$S_{\triangle AEF}$取得最大值$\frac{9}{8}$.

② 当点E在线段DG上时,$AE=AG+GE=2+x$,$h=GH=OG-OH=1-x$,所以

$$S_{\triangle AEF}=\frac{1}{2}AE\cdot h=\frac{1}{2}(2+x)(1-x)$$
$$=-\frac{1}{2}(x+\frac{1}{2})^2+\frac{9}{8}<\frac{9}{8},$$

综合可知,$\triangle AEF$面积的最大值为$\frac{9}{8}$.

评注　要求三角形的面积,学生首先容易想到的是表示三角形的底和高,然而在这个动态问题中,$\triangle AEF$的底和高都在变化,所以,要将底和高都用未知数表示,转化为求函数的最大值.而题目中通过

旋转后得到的等腰直角是一线三等角全等模型最基础的形式,容易联想到利用三角形一线三等角模型构造全等三角形.但这个方法存在的难点有两个,一是学生首先不易联想到利用三角形全等模型进行求解,更多可能是通过尝试而得到解决办法;二是点 E 在线段 AG 和线段 DG 上时存在一定差异,在解题过程中增加了难度.

2.2 利用运动轨迹确定面积最值

作为几何动态问题,师生在教学和解题中更习惯于先确定点的运动轨迹,再根据运动轨迹找寻方法.如图 3,根据旋转可知 $\triangle AEF$ 为等腰直角三角形,根据主从联动(瓜豆)模型,可以确定点 F 的运动轨迹为垂直于 AD 的直线 PQ,又点 F 在矩形内,故点 F 的运动轨迹为线段 PQ,且线段 $AP=1$.

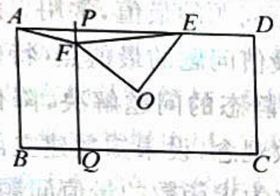

图 3

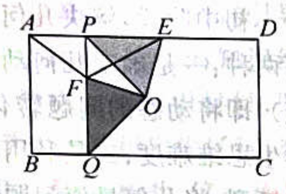

图 4

法一 如图 4,连接 OP、OQ,得到等腰直角三角形 $\triangle OPQ$,又 $\triangle OEF$ 为等腰直角三角形,通过手拉手模型易证 $\triangle OEP \cong \triangle OFQ$.

设 $PE=QF=x$,则 $AE=AP+PE=1+x$,$PF=PQ-FQ=2-x$,所以

$$S_{\triangle AEF}=\frac{1}{2}AE\cdot PF=\frac{1}{2}(1+x)(2-x)$$

$$=-\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{8},$$

当 $x=\frac{1}{2}$ 时,$S_{\triangle AEF}$ 取得最大值 $\frac{9}{8}$.

评注 这一方法与利用一线三等角模型解题相比,有两点优势.在动态问题中,首先应确定动点的运动轨迹,再通过得到的轨迹作辅助线,学生更容易接受;其次,在表示线段 AE 时将 $AE=AG\pm GE$ 转化为 $AP+PE$,避免分类讨论,减轻了学生解题的难度.这一方法的关键在于明确动点之间的位置关系,理清该题中出现的动点是哪些,动的先后顺序,各动点之间的运动牵连,以及最终求的点 E 和哪个动点联系最为密切[2].通过这一联系,可以猜测点 F 的轨迹与点 E 的轨迹的联系.

法二 通过方法一发现 $\triangle OEP \cong \triangle OFQ$,得到 $AE=1+x$,$PF=2-x$,所以有 $AE+PF=(1+x)+(2-x)=3$,为定值.

又 $S_{\triangle AEF}=\frac{1}{2}AE\cdot PF$,由均值不等式可知,当 $AE=PF$,即 $1+x=2-x$,即 $x=\frac{1}{2}$ 时,$S_{\triangle AEF}$ 取得最大值,最大值为 $S_{\triangle AEF}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(2-\frac{1}{2}\right)=\frac{9}{8}$.

评注 在方法一中,虽然难度有所降低,但函数的学习和应用也是初中学生的难点,尤其再结合几何问题,部分学生即使在找到全等三角形表示出面积,但看到二次函数后可能再一次被劝退,而通过确定最大值的特殊点或特殊值求最大值,大大降低了运算要求,当解决了最值后反过来再探究利用函数解析式求最值的方法,即使对于解答题,先通过特殊点或特殊值猜想出结果,再返回去论证过程,也是这类问题的解题策略.

2.3 利用解析几何法求解

解析法是高中解决几何问题的常用方法,然而初中教师很少会让学生用解析法,更多的是利用三角形全等、相似等方式联系题目条件与结论进行解决.而在上述几何动态问题中,无论利用哪种方式求解,学生都会存在思维障碍.很多学生最大的难点在于无法走出第一步,而解析法很好地弥补了这一问题.

如图 5,以 B 为原点,BC,BA 所在直线为 x 轴,y 轴建立平面直角坐标系,则 $O(2,1)$,设 $E(a,2)$,$F(1,b)$,根据 $OE=OF$,由两点间距离公式可得:

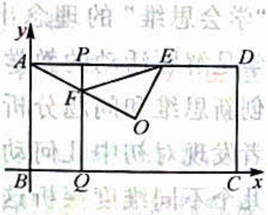

图 5

$$(2-a)^2+(1-2)^2=(2-1)^2+(1-b)^2.$$

整理得 $b=a-1$,所以 $PF=2-b=3-a$,

$$S_{\triangle AEF}=\frac{1}{2}AE\cdot PF=\frac{1}{2}a(3-a)$$

$$=-\frac{1}{2}\left(a-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{8},$$

当 $a=\frac{3}{2}$ 时,$S_{\triangle AEF}$ 取得最大值 $\frac{9}{8}$.

评注 可以发现,利用解析法解决这一问题时,不需要通过全等三角形来确定底和高的关系,学生可以直接建立平面直角坐标系开始运算,思考过程更直接明了,没有几何问题的思维障碍.但弊端在于计算量会偏大,因为要建立平面直角坐标系,更多适用于特殊的多边形背景下的几何动态问题.

3.变式应用

在教学中,很多学生存在着这样一种现象:课堂

上听懂了,下次遇到类似的题目又不会,这是学生在解题教学中缺乏思考与应变能力[3].教师如何利用课堂解决这一问题?利用原题进行变式,让学生根据前面介绍的方法独自思考,真正达到理解性记忆的程度,把解题思路和方法真正"装进脑子里".

变式　如图6,O为矩形$ABCD$对角线的交点,点M为BC边上任一点,$ON \perp OM$且与CD交于点N.若$AB=6$,$AD=4$,则四边形$OMCN$面积的最大值为______.

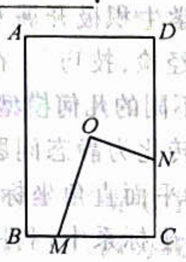

图6

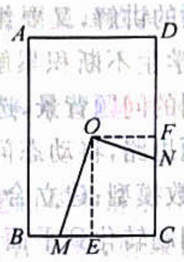

图7

变式题仍然以矩形和直角三角形为背景,将条件"线段旋转90°"弱化成"$\angle MON=90°$",所以原题中的三角形全等模型转化为了三角形相似模型,增加了解决问题的难度.

3.1 利用三角形相似模型求解

变式题需要求四边形$OMCN$面积的最大值,在点M、N的变化过程中,四边形$OMCN$的四边都在变化,不能直接求四边形的面积,要用到割补法,但无论连接MN还是OC,都不方便求解,而根据条件$\angle MON=90°$,能联想到利用直角三角形一线三等角模型进行转化.

如图7,过点O作$OE \perp BC$于E,作$OF \perp CD$于F,则$S_{四边形OMCN}$可转化为利用$S_{\triangle OME}$、$S_{矩形OFCE}$、$S_{\triangle OFN}$来求解.

根据一线三等角模型易得$\triangle OME \backsim \triangle ONF$,所以$\frac{ME}{NF}=\frac{OE}{OF}=\frac{3}{2}$.

① 当点M在线段CE上、点N在线段DF上时,设$ME=3x(0 \leqslant x \leqslant \frac{2}{3})$,则$NF=2x$,

$$\begin{aligned} S_{四边形OMCN} &= (S_{矩形OFCE}-S_{\triangle OME})+S_{\triangle OFN} \\ &= 2\times 3-\frac{1}{2}\times 3\times 3x+\frac{1}{2}\times 2\times 2x \\ &= 6-\frac{5}{2}x, \end{aligned}$$

所以,当$x=0$时,$S_{四边形OMCN}$取得最大值6.

② 当点M在线段BE上、点N在线段CF上时,设$ME=3x(0 \leqslant x \leqslant \frac{2}{3})$,$NF=2x$,

$$\begin{aligned} S_{四边形OMCN} &= S_{\triangle OME}+(S_{矩形OFCE}-S_{\triangle OFN}) \\ &= \frac{1}{2}\times 3\times 3x+2\times 3-\frac{1}{2}\times 2\times 2x \\ &= \frac{5}{2}x+6, \end{aligned}$$

所以,当$x=\frac{2}{3}$时,$S_{四边形OMCN}$取得最大值,最大值为$\frac{5}{2}\times\frac{2}{3}+6=\frac{23}{3}$.

因为$6<\frac{23}{3}$,所以四边形$OMCN$面积的最大值为$\frac{23}{3}$.

与题1类似,要求不规则四边形的面积,学生首先应该想到的是割补法将不规则图形转化为规则图形进行求解,但是在这个动态问题中,通过直接连接MN或是OC都不能表示四边形面积.而题目中的直角条件能够让学生想到一线三等角相似模型,可以构造相似三角形.但这种方法同样存在两个难点,一是学生首先不易考虑到三角形相似模型,二是需要分类讨论并比较两种结果的大小,增加了解题的难度.

3.2 利用动点确定面积最值点

与题1不同,变式题中动点M、N的运动轨迹已经确定.在上述相似模型的方法中,因为需要分类讨论,且计算量较大,对学生来说比较困难,在已经通过模型确定$\triangle OME \backsim \triangle ONF$的情况下,能否直接确定取得最值的点,减少运算量呢?如图8,因为$\triangle OME \backsim \triangle ONF$,则$S_{\triangle OME}$与$S_{\triangle ONF}$会随$ME$的增大而增大,且面积比为$9:4$,所以$S_{\triangle OME}$与$S_{\triangle ONF}$的差也会随$ME$的增大而增大.

点M在线段CE上时,$S_{四边形OMCN}=S_{矩形OFCE}+(S_{\triangle ONF}-S_{\triangle OME})\leqslant S_{矩形OFCE}$,不考虑;

点M在线段BE上时,$S_{四边形OMCN}=S_{矩形OFCE}+(S_{\triangle OME}-S_{\triangle ONF})>S_{矩形OFCE}$,当$ME$最大时,$S_{\triangle OME}$与$S_{\triangle ONF}$的差达到最大值.即当点$M$与点$B$重合时,即$ME=BE=2$时,$S_{四边形OMCN}$最大,最大值为$3\times 2+\frac{1}{2}\times 2\times 3-\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\times 2=\frac{23}{3}$.

对成绩中上的学生来说,利用特殊点或特殊值法,能更快更准求动态几何问题中四边形的最大面积.但在这一方法中,仍然需要利用一线三等角模型确定三角形相似,最终利用两个三角形差的关系来确定最值点.

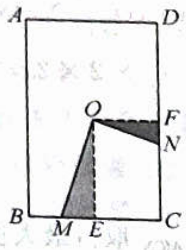

图8

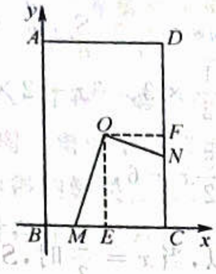

图9

3.3 利用解析法求最值

事实上，若规定M在线段BE上时，ME的长为“正”，M在线段CE上时，ME的长为“负”，即用点E的坐标与点M的坐标差来表示ME的长，就可以将两种不同的结果转化为同一函数解析式，利用解析几何的方式求最值，可以避免构造相似三角形的思维障碍，使问题的解决更简单直接.

如图9，以B为原点，BC，BA所在直线为x轴，y轴建立平面直角坐标系. 则$O(2,3)$，设$M(a,0)$，$N(4,b)$.

由$OM\perp ON$，可得$\frac{3-0}{2-a}\cdot\frac{3-b}{2-4}=-1$，化简得$b=\frac{2a+5}{3}$，所以$ME=2-a(0\leqslant a\leqslant 4)$，$NF=3-b=\frac{4-2a}{3}$，所以

$$S_{四边形OMCN}=S_{矩形OFCE}+S_{\triangle OME}-S_{\triangle ONF}$$
$$=2\times 3+\frac{1}{2}\times 3\times(2-a)-\frac{1}{2}\times 2\times\frac{4-2a}{3}$$
$$=\frac{23}{3}-\frac{5}{6}a,$$

当$a=0$时，$S_{四边形OMCN}$取得最大值$\frac{23}{3}$.

与题1类似，利用解析法解决这类问题时，不需要利用相似三角形模型对面积进行转化，学生可以直接建立平面直角坐标系开始运算，思考过程简单直接，减少了几何类问题的思维障碍，学生更易上手.

3. 结语

几何动态问题是初中阶段的重难点问题，对几何动态问题的探究与解决是九年级师生需要突破的难点，也是学生成绩得到提高的关键. 动态问题的解决，主要是考查学生在解题过程中的动手实践能力、观察能力和探索能力等. 为了有效地解决这类问题，教师应增强其解题的自信，既要做好题型的汇总及对应习题的讲解，又要组织学生积极开展专题训练活动，使学生不断积累解题经验、技巧[5]. 在解题中根据不同的问题背景，选择不同的几何模型；选择正确的解题思路，将动态问题转化为静态问题或建立方程、函数模型；建立合适的平面直角坐标系，将动态几何问题转化到平面直角坐标系中，利用解析法进行求解. 还要及时做好变式训练，让学生独立思考，巩固解题策略，达到举一反三、触类旁通的效果.

参考文献：

[1] 罗增儒. 解题教学是解题活动的教学[J]. 中学数学教学参考，2020(31)：2-5.

[2] 刘引. 探析初中数学解题教学——以期末压轴题的说题为例[J]. 数学之友，2023，37(16)：12-13+17.

[3] 韦元惠. 为学生撬开解题大门——由一道题的解题分析引发的教学建议[J]. 中学数学，2021，(08)：62-63.

[4] 王晓卫. 例谈初中几何动态问题的有效突破[J]. 数学学习与研究，2022，(10)：80-82.

(收稿日期：2024－06－19)

(上接第16页)

3. 重视内省小结，培育学生解题的“领悟力”——从浅学走向深学

“几何直观”的学习与理解是从观察、实验、测量逐步过渡到演绎为主的推理，在几何学习、掌握、运用的过程中，学会用数学语言去表达是“几何直观”的核心素养真正落地的关键一环. 在数学教学中，教会学生借助“数学语言”这一载体，言之有序、言之有理地表达“几何直观”，才算真正掌握解题的内核. 在本课例中，老师不断地启发学生思考、内省、小结，用数学语言表达自己对图形的认识. 课后让学生小结解题的得失，直击过往思维的“痛点”，让学生真切体悟数学语言表达的规范性、概念的思辨性，培育学生解题的“领悟力”，教会学生从解题时的“山重水复疑无路”走向“柳暗花明又一村”，促进学生从浅层学习走向深度学习.

参考文献：

[1] 孙学东. 数学需要教“解题模型”吗?[J]. 中学数学教学参考，2018，(29)：6-9.

[2] 中华人民共和国教育部制订. 义务教育数学课程标准(2022年版)[M]. 北京：北京师范大学出版社，2022，87.

(收稿日期：2024－06－13)