基于模型化的启发式立体几何复习课教学
——以几何体"外接球问题"为例

付廷强

（上海市曹杨第二中学，上海　200333）

1　教学背景

在《普通高中数学课程标准（2017年版）》中，明确地提出了数学学科核心素养应该包括数学抽象、逻辑推理、数学建模、直观想象、数学运算和数据分析这六大素养．几何体外接球问题是直观想象数学素养培养的良好载体，然而根据教学实际，大部分学生在学习立体几何时对几何体的外接球问题表现出理解困难，而这部分内容也是高考热点和难点[1]．

2　应对策略与教法分析

"不愤不启，不悱不发；举一隅而不以三隅反，则不复也"，这是启发式教学方法的精髓，为历代教育家所推崇．正如北京教育科学研究院钟祖荣教授所说，"客观性、主动性、互动性和发展性是启发式教学的四方面特征"．启发式教学可以充分体现学生的主体地位，教师要抓住学习活动中有效的刺激性信息，不断地激发学生的探索兴趣，由学生自主发现和解决问题，培养学生的发散性思维．

在具体到外接球问题的解决过程时，教师可以在启发式教学过程中渗透学生在小初阶段就已学习过的补形法，以整体观构建知识网络，深化学生转化的数学思想（如图1）[2]．补形法的学习贯穿了学生从小学到高中的整个学习阶段[3]．近几年大量高考卷的立体几何试题也可以利用补形法进行解决[4]，通过对几何体添加辅助补形的方式，可以将复杂问题简单化，化散为整，化难为易．

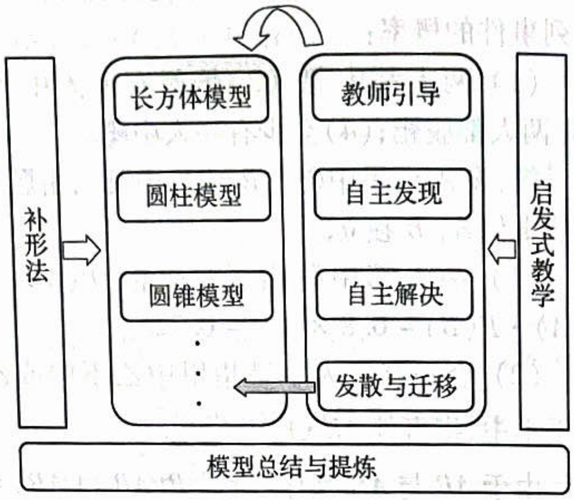

图1

3　模型的探究与总结

3.1　长方体模型

问题1　如图2，请同学们观察长方体及其外接球，如何找到长方体外接球直径？

学生：长方体的体对角线是外接球直径．

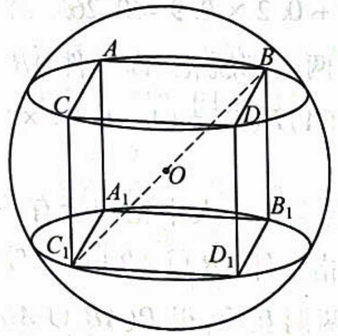

图2

教师追问：为什么？

学生：直观上感觉是这样，而且长方体所有对角顶点关于中心对称，而球面上与直径相交的两点也关于中心对称．

设计意图：本环节旨在帮助学生做好知识铺垫，潜移默化地向学生的思维中注入长方体外接球的结构特征，为接下来的例题深化打好基础．

例1　如图3，在正三棱锥 $S-ABC$ 中，M、N 分别是棱 SC、BC 的中点，且 $AM\perp MN$．若侧棱 $SC=2\sqrt{3}$．则正三棱锥 $S-ABC$ 外接球的表面积是______．

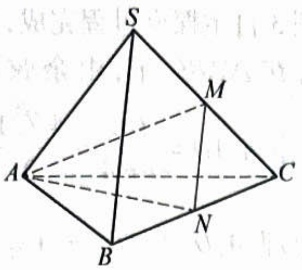

图 3

教师:请大家首先研究三条侧棱有何位置关系?

学生 1:可以证明三条侧棱两两相互垂直.

教师:举一反三是数学知识探索的重要技能,能否结合前述长方体外接球直径得出的过程找到该棱锥的外接球直径.

学生 2:这个三棱锥恰好可以看成长方体的一个角,是不是可以补形成为一个长方体,然后求直径.

例 1 的探索完成,其解法过程如下.

篇幅原因,SA、SB、SC 三条侧棱两两相互垂直不再赘述. 如图 4 所示正三棱锥 $S-ABC$ 恰好可以补形成一个正方体,该正方体的对角线长度即外接球的直径长. 设外接球的半径为 R,则 $(2R)^2 = SA^2 + SB^2 + SC^2 = 12 + 12 + 12 = 36$, $S = 4\pi R^2 = 36\pi$.

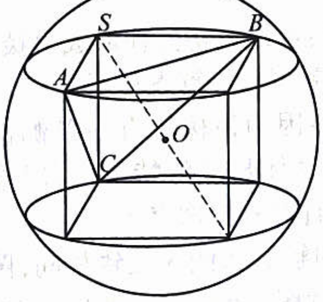

图 4

例 2　如图 5 所示,在三棱锥 $A-BCD$ 中,$AB = CD = 2$, $AC = BD = 3$, $AD = BC = 4$,则该三棱锥外接球的表面积为________.

例 2 没有两两相互垂直的条件,难度更大,学生虽然有一定的解题倾向,但是无法直接给出答案,需要适当引导.

教师:请同学们观察长方体的每组相对面的对角线,长度有何关系?

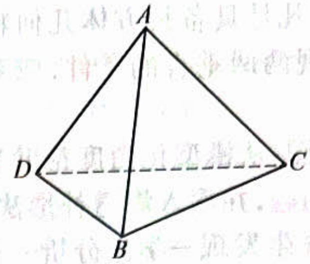

图 5

学生 1:长度是相等的.

教师:该三棱锥的对棱长度也相等,可以将其补形成长方体吗?

学生 2:把棱锥的对棱看成面对角线,那么该几何体也可以补形成长方体.

例 2 的具体解法过程如下.

图 6 的长方体模型满足 $AB = CD = 2$, $AC = BD = 3$, $AD = BC = 4$,设长方体的长宽高为 a、b、c,则 $a^2 + b^2 = 9$, $b^2 + c^2 = 4$, $c^2 + a^2 = 16$,因此,$2(a^2 + b^2 + c^2) = 9 + 4 + 16 = 29$, $a^2 + b^2 + c^2 = \frac{29}{2}$, $4R^2 = \frac{29}{2}$,外接球的表面积 $S = \frac{29}{2}\pi$.

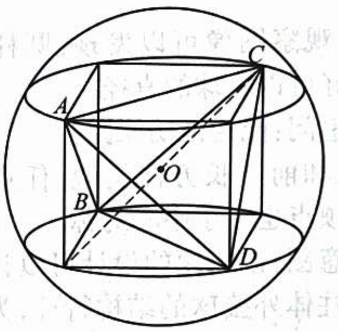

图 6

接下来是总结提炼模型的过程,由教师引导,学生自主完成.

教师:请同学们仔细回顾这两道例题,分析例 1、例 2 解法的异同.

学生 1:都可构建成长方体.

学生 2:例 1 存在两两垂直条件,例 2 是对棱相等.

教师:两题条件并不同,为什么都可以构建成长方体?

学生 3:因为它们都符合长方体的结构特点.

教师:能否总结出哪类三棱锥可以补形成为长方体,进而求解外接球问题?

学生4:凡是具备长方体几何特征的三棱锥,比如出现两两垂直的条件,或者对棱相等的条件.

设计意图:从模型化角度帮助学生串联知识点,解决问题,并深入渗透补形法应用.串联的过程由"学生发现—学生分析—学生解决—学生提炼"构成,训练知识总结和迁移能力.

3.2 圆柱模型

问题2 如图7所示,请同学们观察圆柱体外接球,并思考在给定一个圆柱后,如何获得该圆柱外接球的直径?

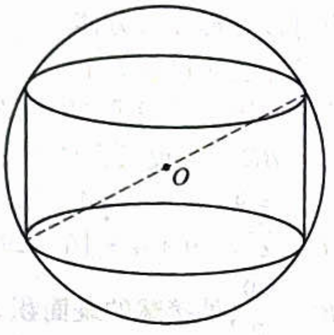

图7

学生:观察图像可以发现,圆柱轴截面的对角线恰好可以是球的直径.

教师追问:能否说明原因?

学生:和前述长方体类似,任意轴截面的两个对角顶点也关于中心对称.

设计意图:该问题的设计可以让学生直观想象出圆柱体外接球的结构特征,为后续例题探究做好知识铺垫.

例3 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AB=4$, $AC=6$, $A=\dfrac{\pi}{3}$, $AA_1=4$, 则直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的外接球的表面积为________.

教师:请大家回顾一下,相对于斜棱柱,直三棱柱具有什么特点?

学生1:直三棱柱的侧棱与底面垂直.

教师:非常好,那么这些侧棱与圆柱母线又有什么相同之处?

学生2:圆柱的母线也垂直于底面.

教师:那该如何确定此几何体的外接球直径?

学生3:可以把这个直棱柱补形成圆柱,然后计算其轴截面的对角线长度.

至此,例3自主探究过程完成,以下是解法.

如图8,在 $\triangle ABC$ 中,由余弦定理, $BC=2\sqrt{7}$. 由正弦定理 $AD=\dfrac{BC}{\sin A}=\dfrac{4\sqrt{21}}{3}$,在 $\triangle AA_1D$ 中,由勾股定理, $A_1D^2=AD^2+AA_1^2=\dfrac{160}{3}$,设外接球半径为 R,则 $4R^2=A_1D^2=\dfrac{160}{3}$,表面积 $S=4\pi R^2=\dfrac{160}{3}\pi$.

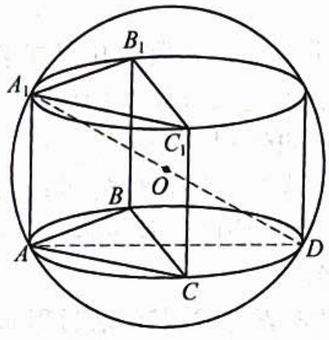

图8

例4 已知三棱锥 $D-ABC$ 的所有顶点都在球 O 的球面上, $AB=3$, $BC=2$, $\angle ABC=60°$, $BD=6$,且 $DB\perp$ 平面 ABC,则球 O 的表面积为________.

教师:请小组探究如何求其外接球的直径.

学生1:可以先将其补形成直棱柱,然后补形成圆柱,就可以计算直径了.

学生2:因为该棱锥有一条侧棱与底面垂直,符合圆柱体母线的特征,可以直接补形成圆柱,然后计算外接球直径.

例4的解法和例3大致相同,图9是补形之后的示意图,计算不再赘述,其表面积 $S=4\pi R^2=\dfrac{136}{3}\pi$.

接下来是模型总结提炼的过程.

教师:请分析例3和例4在解法上的共同点.

学生1:两题均可将几何体补形成圆柱进行求解.

教师:由前面的分析可以得到,满足什么条件的几何体可以补形成为圆柱?

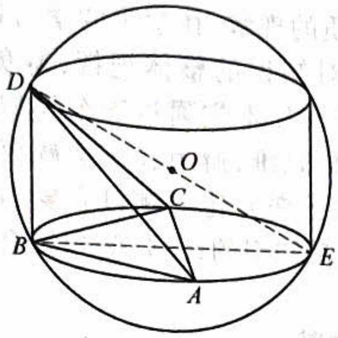

图 9

学生 2:几何体为直棱柱,或者几何体是有一条侧棱垂直于底面的棱锥.

设计意图:通过例 3、例 4 的探究过程,进一步强化学生的模型化思维,以圆柱模型解决一类问题,避免学生管中窥豹. 目的是训练学生分析问题、解决问题的能力.

3.3　圆锥模型

问题 3　请大家仔细观察图 10,思考在给定一个圆锥之后,如何求取该圆锥外接球的直径?

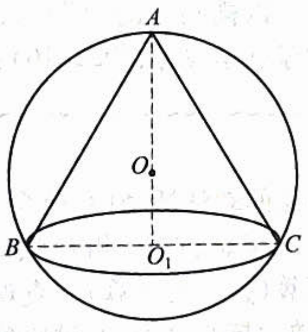

图 10

学生 1:通过观察可以发现,该圆锥轴截面的外接圆为球的大圆,所以该圆锥轴截面的外接圆直径即为其外接球的直径.

教师:结合所示图,能不能更严格地说明圆锥轴截面外接圆恰好是球的大圆? 可以从 A、O、O_1 三点的位置关系上着手.

学生 2:找到圆锥底面的圆心 O_1,连接 AO_1,易得 AO_1 与底面垂直. 连接 OO_1,易得 OO_1 与底面也垂直,所以 A、O、O_1 三点在一条直线上,所以轴截面外接圆恰好是球的大圆.

设计意图:在该问题说理的过程中已经渗透了圆锥的部分几何特征,顶点在底面的投影恰好是底面外接圆的圆心,为接下来的例题深化做好过渡.

例 5　已知圆柱 PO_1 的轴截面 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形,P 为上底面圆的圆心,AB 为下底面圆的直径,E 为下底面圆周上一点,则三棱锥 $P-ABE$ 的外接球的表面积为________.

教师:请同学们思考如何求其外接球的直径?

学生 1:可以将棱锥补形成圆锥,然后计算圆锥轴截面的外接圆直径.

教师追问:根据题意,该棱锥也可以看成是由圆柱切出来的,为什么不能补形成圆柱?

学生 2:因为题目中的外接球是圆锥的外接球,画图也可以看出其与圆柱的外接球并不重合.

探究完成后,有以下的具体解法.

如图 11 所示,$\triangle PAB$ 为圆锥的轴截面. 设 O 为外接球的球心, $PO=AO=R$, 在 $\triangle AOO_1$ 中,由勾股定理,$AO_1^2+OO_1^2=AO^2$,即 $1^2+(2-R)^2=R^2$, 得 $R=\dfrac{5}{4}$, 外接球表面积 $S=4\pi R^2=\dfrac{25}{4}\pi$.

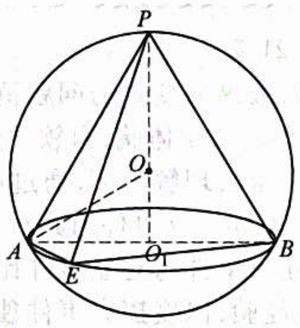

图 11

例 6　已知五棱锥 $P-ABCDE$ 的所有顶点都在球 O 上,顶点 P 在五边形 $ABCDE$ 的投影恰好为该五边形外接圆的圆心. 底面多边形边长 $AE=AB=3$,侧棱长 $PA=2\sqrt{7}$, $\angle BAE=\dfrac{\pi}{3}$, 则球 O 的半径为________.

该例题在完成补形后,计算方法与上题相同,在此不再赘述,可得球 O 的半径 $R=\dfrac{14}{5}$.

教师:请同学们思考例 5 和例 6,两个棱锥的顶点与底面多边形外接圆圆心有什么关系?

学生1：棱锥的顶点与底面外接圆圆心的连线与底面垂直.

教师：此条件还可以等价于棱锥的侧棱长度有何关系？

学生2：侧棱长度都相等.

教师：据此哪位同学可以总结出棱锥补形成圆锥的条件？

学生3：棱锥顶点在底面投影是底面多边形外接圆圆心或者棱锥的侧棱都相等.

设计意图：两道例题帮助学生深化模型特征，最后进行总结提炼，体现了从特殊到一般的思想，有效锻炼了学生举一反三的能力以及直观想象的数学素养.

作业布置：(1)将之前练过的符合特征的题目归类到三个模型中；(2)继续探索并总结分享是否还有其他模型. 此过程可以训练学生的类比发散思维及分析解决问题的能力.

4 反思感悟

纸上得来终觉浅，绝知此事要躬行. 启发式教学方式可以突出学生的主体地位，其中教师的主要作用是巧设问题，并在关键处进行点拨. 用这种方式可以激发学生的探究欲，实现对知识本质的理解. 在学生的学习过程中，学生要学会对知识的整体把握，避免“一叶障目，不见泰山”. 本文通过三个模型帮助学生建立模型化思维，避免在茫茫题海中机械刷题，能透过千变万化的题目表象洞悉问题的本质[5]，实现知识的迁移，深刻体会转化的数学思想.

参考文献

[1] 王曼铃. 直击高考——多面体的外接球问题[J]. 中学生数理化(学习研究)，2018(6)：23－23.

[2] 毛仕理. 补形法在立体几何中的应用[J]. 高中生之友，2010(Z1)：37－38.

[3] 谭泽仁. 空间几何体中几种常见的补形法[J]. 数学学习与研究，2018(11)：129－131.

[4] 齐春燕，魏欣. 用补形法突破高考全国卷立体几何问题[J]. 中学数学研究(华南师范大学版)，2022(21)：8－12.

[5] 孙韩玉. 模型视角下的解析几何高考复习策略——以椭圆中的“调和共轭点”为例[J]. 中学数学教学参考，2022(16)：59－61.

(上接第9－21页)

的、具有横向或纵向变式的问题情境，可以使学生获得深刻的数学体验，引领学生进入深度学习. 笔者在定义理解环节，通过特殊事件的独立性判断、互相独立事件与其对立事件的独立性判断、互斥事件与对立事件比较，不断激活学生已有经验，深度探究事件独立的性质，丰富了学生对事件独立性的认识.

(3) 中学是积累基本活动经验的关键

经验的积累不能仅依赖老师的传授，还需要学生积极地参与数学活动、独立思考和探究，通过积极的操作、实验、推理等活动形成. 在定义应用环节我们选取以打靶为背景的例题，利用事件独立的性质，把复杂事件的概型进行转化，对学生运用知识解决问题的能力要求较高，我们通过一题多问，层层深入，培养学生灵活运用知识解决问题的能力.

(4) 从积累经验到提升素养

在本节课的教学活动中，蕴含着数学抽象(定义环节)、逻辑推理(相互独立事件的性质)、数学运算(概率的计算)和直观想象(反例的构造)等数学核心素养，通过构建问题情境，引发探究，使学生在探究中，理解概念、掌握方法、领悟思想、提升素养.

参考文献

[1] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017年版2020年修订)[S]. 北京：人民教育出版社，2020.

[2] 张奠宙，竺仕芬，林永伟. “基本数学经验”的界定与分类[J]. 数学通报，2008，39(5)：4－7.

[3] 郭华. 深度学习及其意义[J]. 课程·教材·教法，2016(11)：25－32.

[4] 奥苏泊尔. 教育心理学：认知观点.[M]. 北京：人民教育出版社，1994.