指向发展高三学生高阶思维的数学深度课堂

陈庆菊
(江苏省梁丰高级中学,215600)

摘　要:本文主要阐述深度课堂的涵义、解读问题链驱动式教学的模式,并通过案例"解析几何中的同构优化运算 — 双切圆同构类型",阐述在高三专题复习课中如何通过设计问题进行知识重组构建,从而在课堂上落实培养学生的数学核心素养,提高学生的数学学习兴趣,并进行问题驱动模式的深度课堂的探究.

关键词:问题驱动;深度课堂;解析几何;双切圆同构;案例

1 引言

教育教学均应以人为本,以生为本,实现立德树人的教育目标.培养学生的核心素养便是方法与途径.那么,如何在课堂中落实"聚焦核心素养,指向学生发展"成为了每个教师都需要探索的问题.面对新的课程标准,新的教材体系以及教学改革的背景,高中数学教师需要通过调整自身的认识,应用多种方法创造新型高中数学课堂样态.好的数学课堂应当让每个学生均能学到自己能学到的数学知识及能力,针对学情进行的教学设计才能更好地实现这一目标,创建深度课堂能够更加激发学生的学习积极性,落实核心素养的培养.

2 研究基础

2.1 深度课堂的内涵

什么样的课堂是深度课堂呢?于数学而言,深度即理性.在高中阶段,学生的学习能力以及知识储备足够支撑他们在高中数学世界里进行独立思考.深度课堂重在数学思维的碰撞,数学语言的交流,数学符号的行走.

2.2 深度课堂的不同体现

深度课堂首先体现在教师的理念:重学情,重生成,重交流,重思考.在教师的实际操作层面,深度课堂体现在以下几个方面:(1) 创设合理的情境,以问题串的形式层层递进激发学生的思维,在课堂实施中,重视与学生的对话交流,不断反思,师生同频共进,从而形成具有活力的师生对话课堂;(2) 注重知识建构的主动性;(3) 强调"为什么"以及学习内容的迁移性;(4) 突出思维培养的批判性;(5) 重视结果呈现的生成性.总之,有深度的课堂是充满活力的数学课堂,它兼具数学内容的广适性、数学思维的深刻性和数学学习的温暖性.

2.3 问题驱动式教学的解读

问题驱动式教学即由教师创设合情合理的学情情境,巧妙设置符合学生最近发展区的问题串,营造适合学生心理体验的氛围,将学生的学习置于一个不断积极探索的思维过程中.以问题制造困惑,在问题串的驱动下激发思考,引发学生进一步学习的兴趣和欲望,以目标引导解决困惑.

3 案列呈现

高三课堂需要具备基础性、综合性、灵活性、本质性等特点,高三复习课的教学设计应当以发展学生数学学科核心素养为导向,培养学生的数学学科核心素养.笔者选取了一节高三专题复习课"解析几何中的同构优化运算 — 双切圆同构类型",授课对象为高三资优生,本文重在探讨这节课在落实核心素养、注重学生思维、坚持问题驱动、创建深度课堂等方面的尝试与探索.

3.1 情境引入,巧设台阶

教师:谈到解析几何,我们都知道这是利用代数方法解决几何问题的数学学科分支,那么中心词就是一个字"算".计算是否有方法?过程是否可以简化?能否在解析几何的运算过程中体验数学的简洁美与和谐美呢?我们先来看一道高考试题的第一问,如果是你,你会想到什么解决策略?

题1　(2022年新高考Ⅰ卷)已知$A(2,1)$在双曲线$\frac{x^2}{2}-y^2=1$上,直线l交C于P,Q两点,直线

本文系江苏省教育科学"十四五"规划2021年度课题"新课程标准下的初高中数学衔接的过渡研究"(编号:JS/2021/ZX0905-02729)的研究成果.

AP,AQ的斜率之和为0,求l的斜率.

学生讨论,给出几种解决途径.

法一:(齐次化优化)设AB:$m(x-2)+n(y-1)=1$,构造出$k_1+k_2=\frac{y_1-1}{x_1-2}+\frac{y_2-1}{x_2-2}$的形式求解.

法二:(双设直线斜率,点同构)设AP,AQ的斜率分别为k_1,k_2,求得$P(\frac{-4k_1^2+4k_1-2}{1-2k_1^2},\frac{2k_1^2-4k_1+1}{1-2k_1^2})$,同理可得$Q(\frac{-4k_2^2-4k_2-2}{1-2k_2^2},\frac{2k_2^2+4k_2+1}{1-2k_2^2})$,从而得$k_{PQ}=-1$.

法三:(方程同构)由法二知$P(\frac{-4k_1^2+4k_1-2}{1-2k_1^2},\frac{2k_1^2-4k_1+1}{1-2k_1^2})$,设直线$PQ$的方程为$y=kx+m$,因为$P$在$PQ$上,所以

$$\frac{2k_1^2+4k_1+1}{1-2k_1^2}=k\cdot\frac{-4k_1^2-4k_1-2}{1-2k_1^2}+m,$$

化简得:

$$(4k+2m+2)k_1^2+(4+4k)k_1+2k-m+1=0.$$

同理可得:

$$(4k+2m+2)k_2^2+(4+4k)k_2+2k-m+1=0.$$

于是可得$k_1+k_2=-\frac{4+4k}{4k+2m+2}=0$,从而得$k_{PQ}=-1$.

题2 若$P_1(x_1,y_1)$,$P_2(x_2,y_2)$满足$mx_1+ny_1+c=0$,$mx_2+ny_2+c=0$,则直线P_1P_2的方程为$mx+ny+c=0$.

教师:我们还可以利用同构解释圆锥曲线的切点弦方程.比如椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$上一点$P(x_0,y_0)$处的切线方程是$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$,那么,过椭圆外一点$Q(x',y')$作椭圆的两条切线,切点分别为$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,则直线$AB$的方程为$\frac{x'x}{a^2}+\frac{y'y}{b^2}=1$.

教师:同构就是指除了变量以外其他结构都相同的表达式,其本质在于"可替换",就是可以使用"同理可得",利用同理可得可以简化运算,今天我们来研究利用同构简化运算解析几何中的一类问题"双切圆同构".

设计意图 让学生初步体会同构在解析几何中的应用及作用,理解同构的概念,抓住利用同构优化的关键:观察分析代数表达式,找到除了变量以外其余均相同的结构.

高三复习课的教学设计应当引导学生突破思维瓶颈,指向创造性能力的培养.此课例从一道解析几何高考题引入,通过多种解法的对比来引导,法一是从逻辑关联角度想到设直线AB的方程,法二是从基础认知角度出发分别设直线PA、PB的方程,这两种方法是学生已有的解题经验.但也正是因为有这样的解题经验,从某种层面来讲可能限制了思维的再创造,所以在此课例的教学过程中设计了法三,将法二中解出的P、Q的坐标代入直线PQ的方程,构造同构式,有意识地引导学生进行代数式和代数数据的观察,引导学生进行思维训练,在这个环节中,给了学生充分的思考和表达的时间,逐渐将学生的思维引向深入,为后面转变处理角度、调整策略、优化运算提供了心理支持.引入中的题2则是为了巩固学生对同构的认知,为更好地处理后续的问题提供思维支持,让学生理解:同构就是指除了变量以外其他结构都相同的表达式,其本质在于"可替换",需要强化对代数表达式的观察分析能力.发现同构形式,利用同构优化运算的过程中,可以突出体现直观想象、数据分析、逻辑推理、数学运算等核心素养.

3.2 问题贯穿,思维构建

例1 (2021年八省联考试题)已知抛物线$y^2=2px$上三点$A(2,2)$,B,C,直线AB,AC是圆$(x-2)^2+y^2=1$的两条切线,则直线BC的方程为( ).

A. $x+2y+1=0$ B. $3x+6y+4=0$

C. $2x+6y+3=0$ D. $x+3y+2=0$

解析 由条件可得$p=1$,故抛物线的方程为$y^2=2x$.设$B(x_1,y_1)$,$C(x_2,y_2)$,则直线AB的方程为$2x-(2+y_1)y+2y_1=0$,直线AC的方程为$2x-(2+y_2)y+2y_2=0$,直线BC的方程为$2x-(y_1+y_2)y+y_1y_2=0$.

又由条件知圆心(2,0)到直线AB的距离$d=\frac{|4+2y_1|}{\sqrt{2^2+(2+y_1)^2}}=1$,化简得$3y_1^2+12y_1+8=0$.

同理可得$3y_2^2+12y_2+8=0$.

所以y_1,y_2是方程$3y^2+12y+8=0$的两根,故$y_1+y_2=-4$,$y_1y_2=\frac{8}{3}$.

所以直线BC的方程为$2x+4y+\frac{8}{3}=0$,即$3x+6y+4=0$.

教师继续让学生思考以下问题:

① 同学们的第一想法是如何求解?在计算之前

考虑可行性了吗?

② 能利用同构简化运算吗?(抛物线上两点构成直线的同构式,两点的方程同构)

③ 直线 BC 与圆的位置关系是什么?(相离)

④ 若将圆的方程改为 $(x-4)^2+y^2=4$,则过抛物线 $y^2=2x$ 上一点 $A(8,4)$ 作圆的两条切线 AB、AC,分别交抛物线于点 B,C,则直线 BC 的方程是什么?直线 BC 与圆的位置关系是什么?

⑤ 圆的方程依然为 $(x-4)^2+y^2=4$,则过抛物线 $y^2=2x$ 的顶点作圆的两条切线 AB,AC,分别交抛物线于点 B,C,则直线 BC 的方程是什么?直线 BC 与圆的位置关系是什么?

在此基础上,教师介绍如下定理:

彭赛列闭合定理　平面上给定两条圆锥曲线,若存在一封闭多边形外切其中一条圆锥曲线且内接另一条圆锥曲线,则此封闭多边形内接的圆锥曲线上每一个点都是满足这样(切、内接)性质的封闭多边形的顶点,且满足此性质的封闭多边形的边数相同.

最简明的彭赛列闭合定理表示为:一个三角形内接于一个圆,内切于一个圆,则外接圆可以有无数个内接三角形满足其内切圆为上述的同一个.

设计意图　通过小题入手,体会抛物线中双切圆同构的"同理可得",介绍彭赛列闭合定理,让学生体会高观点下的解析几何命题思路,激发同学们的求知欲,拓展其思维深度和广度.

例2　(2021年高考全国甲卷试题)抛物线 C 的顶点为坐标原点 O,焦点在 x 轴上,直线 l:$x=1$ 交 C 于 P,Q 两点,且 $OP\perp OQ$.已知点 $M(2,0)$,且 $\odot M$ 与 l 相切.

(1) 求 C,$\odot M$ 的方程;

(2) 设 A_1,A_2,A_3 是 C 的三个点,直线 A_1A_2,A_1A_3 均与 $\odot M$ 相切.判断直线 A_2A_3 与 $\odot M$ 的位置关系,并说明理由.

解析　由题意可知 $P(1,1)$,进而可得抛物线的方程为 $y^2=x$,$\odot M$ 的方程为 $(x-2)^2+y^2=1$.

设 $A_1(x_1,y_1)$,$A_2(x_2,y_2)$,$A_3(x_3,y_3)$,则 $y_1^2=x_1$,$y_2^2=x_2$,两式相减得 $y_1^2-y_2^2=x_1-x_2$.

当 $x_1\neq x_2$ 时,$\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\dfrac{1}{y_1+y_2}$,所以直线 A_1A_2 的方程为 $y-y_1=\dfrac{1}{y_1+y_2}(x-x_1)$,化简得 $x-(y_1+y_2)y+y_1y_2=0$.

当 $x_1=x_2$ 时,$y_1=-y_2$,$y_1y_2=-x_1$,直线方程 $x=x_1$ 符合 $x-(y_1+y_2)y+y_1y_2=0$.

所以直线 A_1A_2 的方程为 $x-(y_1+y_2)y+y_1y_2=0$.

同理可得,直线 A_2A_3 的方程为 $x-(y_2+y_3)y+y_2y_3=0$,直线 A_1A_3 的方程为 $x-(y_1+y_3)y+y_1y_3=0$.

由于直线 A_1A_2 与 $\odot M$ 相切,所以 $\dfrac{|2+y_1y_2|}{\sqrt{1^2+(y_1+y_2)^2}}=1$,化简得:

$(y_1^2-1)y_2^2+2y_1y_2+3-y_1^2=0$.

同理(方程同构)可得 $(y_1^2-1)y_3^2+2y_1y_3+3-y_1^2=0$,所以 y_2,y_3 是方程 $(y_1^2-1)y^2+2y_1y+3-y_1^2=0$ 的两个实数根,所以 $y_2+y_3=\dfrac{-2y_1}{y_1^2-1}$,$y_2y_3=\dfrac{3-y_1^2}{y_1^2-1}$,故圆心 M 到直线 A_2A_3 的距离

$$d=\frac{|2+y_2y_3|}{\sqrt{1^2+(y_2+y_3)^2}}=\frac{\left|2+\dfrac{3-y_1^2}{y_1^2-1}\right|}{\sqrt{1+\left(\dfrac{-2y_1}{y_1^2-1}\right)^2}}$$

$=1$.

直线 A_2A_3 与 $\odot M$ 相切.

之后,教师让学生思考如下问题:

① 在求出 C,$\odot M$ 的方程后,你发现本题的命题背景了吗?

② 可以如何迅速判断出直线与圆相切的位置关系?

③ 彭赛列闭合定理给出了一种图形结构上的同构形式,这种"群结构"也称为"彭赛列结构",那么我们如何用同构叙述出解题过程?

抛物线中,通常利用点坐标的参数表示形式实现抛物线上两点构成直线方程的同构表示.本题中,可以利用点坐标中的参数符合的方程同解来解决.

④ 如果换成椭圆或者双曲线,我们还可以解决吗?策略有没有些许细微的差别?

设计意图　通过完善解答的表达过程,着力培养学生解题的严密性,思考分析问题的缜密性.

变式　(2009年高考江西卷文科22题)如图1,已知圆 G:$(x-2)^2+y^2=r^2$ 是椭圆 $\dfrac{x^2}{16}+y^2=1$ 的内接 $\triangle ABC$ 的内切圆,其中 A 为椭圆的左顶点.

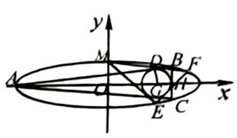

图1

(1) 求圆 G 的半径 r;

(2) 过点 $M(0,1)$ 作圆 G 的两条切线交椭圆于 E、F 两点，证明：直线 EF 与圆 G 相切.

解析　(1) 设 $B(2+r,y_0)$，过圆心 G 作 $GD\perp AB$ 于 D，BC 交长轴于 H.

由 $\frac{GD}{AD}=\frac{HB}{AH}$ 得 $\frac{r}{\sqrt{36-r^2}}=\frac{y_0}{6+r}$，故

$$y_0=\frac{r\sqrt{6+r}}{\sqrt{6-r}}.\quad ①$$

而点 $B(2+r,y_0)$ 在椭圆上，所以

$$y_0^2=1-\frac{(2+r)^2}{16}=-\frac{(r-2)(r+6)}{16}.\quad ②$$

由①②可知 $15r^2+8r-12=0$，解得 $r=\frac{2}{3}$ 或 $r=-\frac{6}{5}$(舍去).

(2) 设过点 $M(0,1)$ 与圆 $(x-2)^2+y^2=\frac{4}{9}$ 相切的两直线的方程分别为 $l_1:y-1=k_1x$ 和 $l_2:y-1=k_2x$.

由条件可得 $d=\frac{|2k_1+1|}{\sqrt{1+k_1^2}}=\frac{|2k_2+1|}{\sqrt{1+k_2^2}}=\frac{2}{3}$，可知 k_1、k_2 均为方程 $32k^2+36k+5=0$ 的根，所以 $k_1+k_2=-\frac{9}{8}$，$k_1k_2=\frac{5}{32}$.

方法一：联立 $\begin{cases}y-1=k_1x,\\ \frac{x^2}{16}+y^2=1,\end{cases}$ 可得 $(16k_1^2+1)x^2+32k_1x=0$，所以 $x_E=\frac{-32k_1}{16k_1^2+1}$，$y_E=\frac{1-16k_1^2}{16k_1^2+1}$.

同理可得 $x_F=\frac{-32k_2}{16k_2^2+1}$，故直线 EF 的斜率为

$$k_{EF}=\frac{k_1x_1-k_2x_2}{x_1-x_2}=\frac{\frac{-32k_1^2}{1+16k_1^2}+\frac{32k_2^2}{1+16k_2^2}}{\frac{-32k_1}{1+16k_1^2}+\frac{32k_2}{1+16k_2^2}}$$

$$=\frac{32(k_2^2-k_1^2)}{32(k_2-k_1)-32\times16k_1k_2(k_2-k_1)}$$

$$=\frac{k_1+k_2}{1-16k_1k_2}=\frac{3}{4}.$$

直线 EF 的方程为 $y+\frac{32k_1^2}{16k_1^2+1}-1=\frac{3}{4}\left(x+\frac{32k_1}{16k_1^2+1}\right)$，即 $9x-12y-28=0$，则圆心 $G(2,0)$ 到直线 EF 的距离 $d=\frac{|9\times2-28|}{\sqrt{9^2+(-12)^2}}=\frac{2}{3}$，故直线 EF 与圆 G 相切.

方法二：设直线 EF 的方程为

$$mx+n(y-1)=32.\quad ③$$

椭圆方程可以转化为 $x^2+16[(y-1)+1]^2-16$，即 $x^2+16(y-1)^2+32(y-1)=0$，结合③可得：

$$(n+16)(y-1)^2+mx(y-1)+x^2=0.$$

因为直线 EF 不过点 $(0,1)$，所以 $x\neq0$，故

$$(n+16)\left(\frac{y-1}{x}\right)^2+m\cdot\frac{y-1}{x}+1=0.$$

从而可知方程 $32k^2+36k+5=0$ 与方程 $(n+16)k^2+mk+1=0$ 同解，所以 $\frac{n+16}{32}=\frac{m}{36}=\frac{1}{5}$，所以 $m=\frac{36}{5}$，$n=-\frac{48}{5}$，从而得直线方程为 $9x-12y-28=0$. 则圆心 $G(2,0)$ 到直线 EF 的距离 $d=\frac{|9\times2-28|}{\sqrt{9^2+(-12)^2}}=\frac{2}{3}$，故直线 EF 与圆 G 相切.

设计意图　体会双切圆模型在抛物线和椭圆中的区别，抛物线重在点方程同构，因为抛物线的参数方程比较便捷，椭圆和双曲线重在斜率方程同构，共同点在于避免繁杂的计算，利用同构的“同理可得”完成题目的求解.

例1通过小题入手，体会抛物线中双切圆同构的“同理可得”，介绍彭赛列闭合定理，让学生体会高观点下的解析几何命题思路，激发学生的求知欲，拓展其思维深度和广度. 学生对于彭赛列闭合定理的本质不清楚，因此，此教学设计中采用一系列的变式激起学生的探究欲，通过改变点 A 的位置进行深入和拓展，引导学生利用已有经验独立思考、大胆尝试，又在恰当的时候有效引领和点拨. 这个过程不仅让学生在思维的碰撞中亲历了知识的形成过程，而且让学生深刻感受了数学的对称美，更重要的是让学生学会了思考某类数学问题的一般方法. 无疑，这种体验是深刻的，对问题的理解也是深刻的. 这可以看成是一种类型的深度课堂的解读.

3.3 升华小结 深度理解

教师：由彭赛列闭合定理以及前面两道题的体验过程，同学们觉得彭赛列闭合还可以在哪一种曲线中命题?(双曲线) 以双曲线为背景命题使用的同构，你觉得类似于抛物线的点方程同构还是椭圆的斜率方程同构?(类似于椭圆的斜率方程同构) 你能为高考设计一道以彭赛列闭合为背景结合双曲线的题目吗?请大家课后研讨完成.

(下转第29页)

解 由条件和余弦定理得

$$3a+b=c(6\cos B-1)=\frac{3(a^2+c^2-b^2)}{a}-c$$

$$=3a-c+\frac{3(c+b)(c-b)}{a},$$

所以 $b+c=\dfrac{3(c+b)(c-b)}{a}$,所以 $a=3(c-b)$. 结合正弦定理得 $\sin A=3(\sin C-\sin B)$,再结合柯西不等式可得:

$$\frac{3}{\sin A}+\frac{16}{\sin B}=\frac{1^2}{\sin C-\sin B}+\frac{4^2}{\sin B}$$

$$\geqslant\frac{(1+4)^2}{\sin C-\sin B+\sin B}\geqslant 25,$$

当且仅当 $\dfrac{1}{\sin C-\sin B}=\dfrac{4}{\sin B}$ 且 $\sin C=1$,即 $\sin B=\dfrac{4}{5}$,$\sin A=\dfrac{3}{5}$,$\sin C=1$ 时取等号.

所以,$\dfrac{3}{\sin A}+\dfrac{16}{\sin B}$ 的最小值为 25.

题1四种解法的区别在于,对问题的不同方向上的思考导致了选择不同的思想方法处理问题,从不同维度和角度提升了教师从不同方向上思考处理问题、整合问题的能力. 方法中既有代数方向上的化解处理,也有图形的辅助分析,综合使用数形结合、不等式、函数、几何等工具解决问题,是对综合素质和思维品质的训练和提升,最终问题也得到了变式探究. 其解题方法也可在数学竞赛、培优中进行尝试和推广,一方面拓宽学生的视野,提升解题能力,另一方面也提升了教师的数学专业素养和能力.

(收稿日期:2023－05－20)

(上接第22页)

引申创新1 圆的方程为 $(x-1)^2+y^2=1$,过双曲线 $x^2-y^2=1$ 上一点 $P(3,2\sqrt{2})$ 作圆的两条切线,分别交双曲线于 A,B 两点,求 AB 的直线方程并证明 AB 与圆相切.

引申创新2 已知椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 上一点 $A\left(-1,\dfrac{3}{2}\right)$,过点 A 作两条直线与 $y=tx^2(t<0)$ 相切,分别交椭圆于 P,Q 两点,求证:PQ 过定点.

教师:① 创新1和创新2,分别创新在哪一点?

创新1体现在圆的双切线交点的位置的改变,改变成了在双曲线上;创新2的改变体现在由"圆的双切线"变为"抛物线的双切线".

② 这两道题的最优解题策略是什么?

③ 你还见过此种类型的同构模型吗?你还有什么可以创新的题目吗?

在教学小结中,此教学设计将这一问题指导学生进行一般化的研究,体会双切圆模型在抛物线和椭圆中的区别,学生在老师的引导下,经历对运算对象反思的过程,将思维聚焦,问题"结构"作进一步拓展,从中提炼出"通性"、"通法",体现了数学的理性精神. 在探究过程中,学生发现抛物线的代数结构处理起来更为便捷,所以抛物线问题重在研究点方程同构,而椭圆和双曲线方程比较复杂,应着重在对斜率方程同构的研究上,而同构方法的共同点在于避免繁杂的计算. 这个过程实质上是完善了思维结构,增加了学生处理问题的思维反应能力,有效提升了学生的实战能力.

4 教学思考

4.1 高三专题复习课也应体现新课程目标的基本理念

解析几何是用代数方法研究几何问题的学科,也是高考重点考查的内容之一,近年高考中对解析几何的考查出现了斜率的相关性问题、相切问题、对称结构的问题、动态图形的轨迹问题等,引发了我们对此类课堂设计的关注,解决这类问题最主要的是发现算法算理,从而优化运算. 代数运算的算法、算理是高三解析几何教学的重点方向,也是素养导向下考试的一大方向. 此案例的设计,旨在让学生认识同构这种常用的数学思想方法,体会数学的和谐美与对称美.

4.2 问题驱动式有效促进深度课堂生成

此教学设计,从引入、生成到小结,均在一系列问题的驱动下进行,师生在对话、交流中经历了彭赛列闭合模型问题中的运算受困、寻求优化运算的策略、反思运算对象、赏析定理的思维旅程,体现了"深度学习"理念,落实了高三专题复习的"精、实、透"原则,注重"以实战盲点带动能力培养提升""的复习方式,选题经典,难度适中,用较少的素材讲了最需要讲的问题. 教学过程充分落实了学生独立思考、动手运算的要求,教师引导学生反思解题过程,有效完善了思想方法,集中解决了一类问题.

(收稿日期:2023－06－07)