

高中三角函数概念教学的反思与重构

肖雄 刘春琳 (贵州师范大学数学科学学院 550000)

摘要 通过教学反思,对比不同教材,从概念本质出发,发现单位圆等元素并非是三角函数概念教学引入的唯一途径,因而对三角函数的概念教学进行教学重构,以期教学提供新思路。

关键词 三角函数;概念教学;教学反思;教学重构

文章编号 1004-1176(2024)09-0025-03

1 引言

三角函数是一类最典型的周期函数.《普通高中数学课程标准(2017年版)》(下称《课标》)中提出:“借助单位圆理解三角函数(正弦、余弦、正切)的定义.”^[1]^[2] 概念教学一直是数学教学的一大难点,需要遵循一定的路径,要让学生经历“背景—研究对象—对应关系的本质—定义”的过程^[2],才能使其对数学概念的理解更为透彻。

教学反思能够不断发现、探究并解决教与学实践中的具体问题,提高教学实践的合理性^[3].通过聆听一线教师上课、进行模拟授课及观摩国家中小学智慧教育平台的教学资源并进行反思,笔者发现在“三角函数的概念”教学中存在的问题,因而作了深入思考并进行教学重构,以期提高教学的合理性和有效性。

2 对“三角函数的概念”教学与教材的研究

2.1 三角函数概念教学的特点

课堂引入时,许多教师将初中锐角三角函数的复习作为切入点,对锐角三角函数作简单的复习后,将其放入直角坐标系进行研究.此时, α 为锐角,则终边在第一象限(图1),找到 $\text{Rt}\triangle OPM$,再用相似三角形证明得出比值与点 P 的位置无关,进展一度十分顺利.而当 α 推广至任意角时(以第二象限为例),问题出现了:如何向学生解释当 α 为钝角时,刚好就对应 $\text{Rt}\triangle OAB$?关于三角函数概念教学中将锐角推广至任意角的教学策

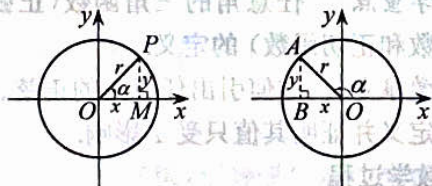


图1 锐角三角函数的定义

略,有的教师认为对此不必作解释,直接利用圆的对称性简单说明第二象限情形下的证明与第一象限一致;还有的教师认为在复习完锐角三角函数后,应直接对任意角的正弦、余弦和正切下定义,再利用单位圆即可来定义三角函数,让学生在之后对三角函数的应用中逐渐深化理解。

有关“三角函数的概念”教学的研究中,部分研究者在设计这节课的教学时,都不约而同地以“带领学生从实际情境中抽象出单位圆”为教学起点^[4-5].那么单位圆是否为唯一引入点?能否在引入三角函数的概念之后再引入单位圆呢?过度强调单位圆是否会产生“本节课研究的是圆”的错觉?

2.2 不同版本教材对比

人教A版必修一仅用一页,借助单位圆与任意角 α 终边的交点很快便给出了三角函数的概念.值得注意的是,其在给出三角函数的概念时,自变量 α 被直接替换成了学生所习惯的 x ,且在教材中并没有强调前后 x 含义的不同。

北师大版必修二将正弦函数与余弦函数放在了同一个部分,先利用单位圆引出锐角的正弦函数与余弦函数,再将其范围扩展至任意角,经过系统学习之后,再利用 $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ 这一关系引出正切函数。

苏教版必修一利用点 P 两种坐标的表示和初中所学的锐角三角函数,得出比值 $\frac{y}{r}$, $\frac{x}{r}$ 与 $\frac{y}{x}$,并将其分别定义为 α 的正弦、余弦和正切,再通过例题,让学生直观感受到实数 α 与 $\sin \alpha$ 的一一对应关系,得出其满足函数关系.同理得出 $\cos \alpha$ 与 $\tan \alpha$ 也都是 α 的函数,三者统称为三角函数。

3 教学问题的提出与思考

结合教学中出现的问题以及不同版本教材的设计,笔者总结出以下几点疑问:第一,用锐角三角函数的简单复习来引入,会不会对后续推广到任意角造成影响?第二,复习锐角三角函数后,直接对三角函数的概念下定义,学生能否理解?第三,必须在单位圆内引入三角函数吗?第四,下定义时需要将三角函数的自变量 α 替换为学生所熟知的 x 吗?

首先,通过简单复习锐角三角函数来引入稍显不妥.我们可以利用初中所学的锐角三角函数知识作引入,但并不是单纯借锐角三角函数直接引出任意角的三角函数的概念,而是类比初中研究锐角三角函数的思维,将其迁移至此,得出坐标参数之间的关系.初中所学习的锐角三角函数与高中的三角函数有着本质的区别:锐角三角函数仅研究直角三角形中的边与边的比值关系,而三角函数研究周期运动,其比值是任意角 α 终边上任一点的坐标值之间的比值;前者是边长的比值,恒定为正,后者在推广至任意角后随着坐标值的变化可以为负.因此,仅借助锐角三角函数的简单复习引入三角函数,难免给部分学生造成误解.如图1,将锐角放入直角坐标系,即终边在第一象限,此时有 $\cos \alpha = \frac{OM}{OP} = \frac{x}{r}$,但是推广至第二象限时, $\cos \alpha = \frac{OB}{OA} = \frac{x}{r}$ 显然不成立.此时如果没有教师的引导,部分学生可能会受到锐角三角函数认识的影响,认为这个比值就是边与边的比值,从而陷入认识上的误区.在证明 $\sin \alpha = \frac{y}{r}$, $\cos \alpha = \frac{x}{r}$ 与 $\tan \alpha = \frac{y}{x}$ 三个比值只与 α 的大小有关时,如果让学生模仿第一象限的证明方法,利用三角形的相似来证明终边上点的位置对其没有影响,很容易使其陷入“三角函数就是三角形边与边的比值关系”的误区.至于上文中提到的圆的对称性,并不是用来证明比值与终边上点的位置无关.《课标》提供案例6“利用单位圆的对称性探索三角函数的诱导公式”^{[1]115}的目的是在单位圆中借助圆的对称性,探索三角函数的对称性以得出相关的诱导公式.

其次,并不是所有的学生都能接受灌输式的

概念教学.例如,指数函数与对数函数的学习都是在先引入指数与对数的概念之后,方才进入对应函数的学习.笔者认为,在三角函数的学习中,也应该将正弦值、余弦值和正切值这三个定义的学习放在引入三角函数的概念之前,这样更符合知识的逻辑顺序以及大部分学生的认知水平和接受能力.

再次,单位圆并不是引入的唯一途径.三角函数是研究周期性现象的函数,圆是三角函数所研究的对象,而引入单位圆,是为了更方便在圆中对三角函数进行研究,如正弦函数的图象和性质及诱导公式一的得出等.在学习三角函数的过程中,可以将单位圆融入例题,让学生直观地感受到利用单位圆进行研究的便利性,或者在引入三角函数的概念之后再引入单位圆,这样或许更为适合学生对三角函数概念的学习,也能避免学生产生“本节课研究的是圆”的错觉.

最后,表示自变量的字母可换可不换.如人教A版,替换前 $\frac{y}{x} = \tan \alpha (x \neq 0)$,替换后 $y = \tan x, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$.替换前点明 $x \neq 0$ 是为了保证比值有意义,即任意角 α 的终边在 y 轴上时 $x=0$,此时比值 $\frac{y}{x}$ 无意义;而替换后的 x 为三角函数自变量,等同于替换前的任意角 α 的取值范围,两者有根本的区别.若没有教师的引导与解释,或许部分学生会对此存在误解,若要换为习惯上的 x ,教师需要对此作出解释.

4 “三角函数的概念”教学重构

4.1 教学目标

- (1) 理解并掌握正弦、余弦、正切的定义,会计算特殊角的正弦、余弦、正切.
- (2) 掌握正弦函数、余弦函数以及正切函数的定义.
- (3) 提升数学抽象等核心素养,体会数形结合等数学思想.

4.2 教学重难点

教学重点 任意角的三角函数(正弦函数、余弦函数和正切函数)的定义.

教学难点 如何引出任意角的正弦、余弦和正切的定义并证明其值只受 α 影响.

4.3 教学过程

下文基于以上分析和对问题的思考,借助苏

教版教材必修一“任意角的三角函数”进行三角函数的概念的教学设计.

环节1 课堂情境引入.

日常生活中有很多循环往复的现象,我们称之为周期现象,如钟表指针的旋转、摩天轮的旋转等.随着旋转的进行,乘坐的摩天轮的位置发生着怎样的变化呢?这种旋转类似于任意角终边的旋转.学习了任意角和弧度制后,我们知道任意角 α 有顶点、始边和终边等元素,随着 α 的变化,终边围绕其顶点做循环往复的运动.摩天轮上的位置就相当于终边上某点的位置,其与中心的连接轴线即为终边.

问题1 终边围绕顶点做循环往复的运动,那终边上的点又具有什么样的特点?

问题2 将任意角 α 放入直角坐标系,以 x 轴非负半轴为始边,坐标原点为顶点,此时终边类似于我们学过的什么知识?

问题3 终边上的点是否都满足正比例函数的表达式 $y=kx$?

如图2,当 k 不存在时, $\frac{y}{x}$ 无意义;当 k 存在时,教师引导学生得出 $\frac{y}{x}=k$.当 α 确定时,参数 k 也唯一确定,即 α 终

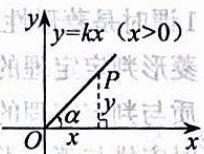


图2

边上的点都满足比值 $\frac{y}{x}$ 为定值.当 α 为锐角时,

终边在第一象限,结合直角坐标系,任取一点 $P(x, y)$ 并作 x 轴的垂线,联想到锐角三角函数 $\tan \alpha$,发现 $\frac{y}{x}$ 与 $\tan \alpha$ 密切相关,即 $\tan \alpha = \frac{y}{x}$,模

仿锐角三角函数给出 $\sin \alpha = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 与 $\cos \alpha =$

$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$.当 k 不存在时,终边的函数表达式为

$x=0$,此时 $\sin \alpha = \pm 1$, $\cos \alpha = 0$;当 k 存在时,因为点 $P(x, y)$ 在 $y=kx$ 上,故消去 y 即得 $\sin \alpha =$

$\frac{kx}{\sqrt{x^2+k^2x^2}} = \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}$, $\cos \alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2+k^2x^2}} =$

$\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}$,所以当 α 确定时, $\sin \alpha$ 与 $\cos \alpha$ 均为

定值.

将学生分为三组,引导学生利用坐标自行证明当 α 不是锐角时(即 α 为第二、三、四象限角

时),只要 α 确定, $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ 与 $\tan \alpha$ 也均为定值,此时定义 $\sin \alpha = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 为 α 的正弦, $\cos \alpha =$

$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 为 α 的余弦, $\tan \alpha = \frac{y}{x}$ ($x \neq 0$)为 α 的正切.

设计意图 利用做周期运动的摩天轮与任意角终边的相似之处引入课堂内容,通过一系列提问,利用所学知识找到三个比值 $\tan \alpha = \frac{y}{x}$,

$\sin \alpha = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 与 $\cos \alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$,并合理利

用参数关系消除参数,得出当 α 一定时三个比值均为定值,避免了利用直角三角形中的锐角三角函数作直接引入所出现的问题.在证明其为定值时合理利用参数关系,而不是利用相似三角形边与边的比值关系,这种引入和证明方式很好地让学生从边与边的比值关系过渡到了坐标之间的关系,形成了认知的碰撞,认识到了任意角的三角函数与初中所学锐角三角函数的区别,培养了学生的数学抽象能力、数学运算能力、逻辑推理能力、小组合作意识以及代数意识.

环节2 随堂演练.

(1) 已知角 α 的终边经过点 $P(2, -3)$,求 α 的正弦、余弦、正切值.

(2) 当 $\alpha = \frac{\pi}{6}$ 时,求 α 的正弦、余弦、正切值.

(3) 当 $\alpha = \frac{5\pi}{6}$ 时,求 α 的正弦、余弦、正切值.

设计意图 第(1)题属于概念应用,用于巩固所学知识.第(2)题仅给出 α 的值,有的学生会犹豫,该怎么取点 P 去计算坐标比值呢?这时候合理地引入单位圆,利用单位圆与终边的交点即可求解.再给出第(3)题,让学生自行求解,在对概念的应用中感受到单位圆的便利性,培养其数学运算能力、类比分析能力和问题解决能力.

环节3 引出函数概念.

利用苏教版必修一第179~180页例3,引导学生将表格填写完整,把 α 的值看作横坐标,把对应 $\sin \alpha$ 的值看作纵坐标,在平面直角坐标系中描出点 $(\alpha, \sin \alpha)$,并用光滑的曲线连接这些点,得到正弦函数的一部分图象,由此引出正弦函数的概念.同理可得余弦函数与正切函数的概念.

一般观念引领下“特殊的平行四边形” 章起始课教学研究

刘鑫漪 (河南省郑州市第九十六中学 450000)

摘 要 单元整体教学有助于学生从全局角度把握知识结构、理解知识本质,是促进学生深度学习的重要途径,而章起始课是实施单元教学的重要载体.以“特殊的平行四边形”章起始课为例,践行单元整体教学理念,总结几何图形研究的“一般观念”,发展数学核心素养.

关键词 单元整体教学;章起始课;特殊的平行四边形;一般观念

文章编号 1004-1176(2024)09-0028-04

1 研究背景

《义务教育数学课程标准(2022年版)》倡导数学内容结构化,单元教学整体化,要求“改变过于注重以课时为单位的教学设计,推进单元整体教学设计……促进学生对数学教学内容的整体理解与把握,逐步培养学生的核心素养”^[1].章起始课作为统领单元学习的第一课,要使学生明白为什么学习本单元、学习本单元的什么内容、按照什么样的方式学习本单元.上好章起始课,可以让学生从整体的角度把握单元内容,促进深度学习的发生.

一般观念统领下的几何图形研究,本质上是

对如下问题的一般性回答:如何通过抽象获得研究对象?概念是怎样定义的?几何图形的性质指的什么?判定是什么?^[2]一般观念是数学学习的方法论,它教会学生如何学习.特殊的平行四边形是北师大版教材九年级上册的第一章,传统的教学安排是:菱形的性质与判定(3课时),其中第1课时是菱形性质定理的探索与证明,第2课时是菱形判定定理的探索与证明,第3课时是菱形性质与判定定理的综合运用;矩形的性质与判定,课时安排与菱形类似.这样的安排相对碎片化,学生只能从局部认识图形,不利于知识、方法、经验的运用与迁移.

设计意图 让学生通过数值的计算和图象的描画直观感受到 $\sin \alpha$ 就是 α 的函数,由此引出正弦函数的概念,并通过类比引出余弦函数和正切函数的概念,培养学生的归纳能力和直观想象能力.

环节4 利用课堂所学解决摩天轮上位置的刻画问题.(略)

5 结束语

本文通过对课堂教学、教材和教育资源的综合分析,反思教育教学中出现的问题,对“三角函数的概念”这一课时进行教学重构:借助任意角的终边与正比例函数的关系研究终边上点的特点,再类比锐角三角函数的探究思路,得出三个比值关系,通过消除参数证明三个比值只受 α 的影响,让学生在小组合作中证明所得,再总结得出正弦、余弦与正切的概念.在这过程中,教师引导学生运用不完全归纳得出 $\sin \alpha$ 是 α 的函数,再类比得出 $\cos \alpha$ 与 $\tan \alpha$,借助更符合高中生思维的参

数来引入和证明,巧妙地避开了第二象限 $\cos \alpha = \frac{OB}{OA} \neq \frac{x}{r}$ 的情况出现;单位圆的引入时机也较为合理,更能让学生深入学习与理解概念,培养其多种数学思维和能力,渗透数学核心素养.

参考文献

- [1] 中华人民共和国教育部.普通高中数学课程标准(2017年版)[M].北京:人民教育出版社,2018.
- [2] 章建跃.如何使学生理解三角函数概念[J].中小学数学(高中版),2017(6):66.
- [3] 周根龙.试论数学教学反思[J].数学教育学报,2003,12(1):90-93.
- [4] 邵海贤.“五I”理论下三角函数概念教学的重构与思考[J].数学教学通讯,2023(33):13-16.
- [5] 闻君.直面评价体系 优化数学教学——以“任意角的三角函数”的教学为例[J].数学教学通讯,2023(36):28-30.