数学核心素养下函数综合题单元教学设计

——以“极值点偏移问题”为例

吴　宝（广东省湛江第一中学）

摘　要：极值点偏移是近年来高考数学中的一个重要考点，涉及函数和导数的知识，是利用导数研究函数的具体体现。在教学过程中教师需要引导学生通过对函数求导求出极值点，研究单调性；能够根据极值点合理构造对称函数，通过对新函数求导，研究单调性，从而解决极值点偏移问题。在教学中，为了帮助学生树立解决问题的信心，笔者结合学生的实际情况，对该内容进行单元教学设计，并对这部分知识实施系统讲解。

关键词：单元教学设计；函数综合问题；极值点偏移
文章编号：1002-2171(2023)4-0017-04

1　研究背景

随着《普通高中数学课程标准(2017年版)》的实施，全国各地在推进新教材的使用，培养学生学科核心素养的教学正式拉开帷幕。这一场教学变革是深刻的，包括教学本质的重新认识、教学目标的正确定位、教学过程的样态变形、教学模式的修正重构、教学策略的顺应改造、教学评价的弃旧塑新。作为中学数学教师，首先要做的事情就是如何设计教学，才能让学生达成新课程目标，使学生通过课堂学习获得进一步学习以及未来发展所必需的数学基础知识、基本技能、基本思想、基本活动经验，能提高从数学角度发现和提出问题的能力、分析和解决问题的能力，能发展数学抽象、逻辑推理、数学建模、直观想象、数学运算、数据分析等数学学科核心素养[1]。

单元教学设计不是单纯的知识点传输与技能训练，而是教师为发展学生学科素养，思考怎样基于一定目标与主题展开探究活动，只有这样，才能整体把握数学课程，突出数学本质，实现教学设计与素养目标的有效对接，创造优质的教学[2]。单元教学设计要求在逻辑过程、心理过程、历史过程的基础上梳理本单元的课程发展主线；从一个单元的整体出发，根据单元的总体目标要求，以不同知识点为载体，以核心数学思想、方法为主线，综合利用各种教学形式和教学策略，使学生形成对一个相对完整的认知结构的一种规划。这样有利于整体把握本单元的教学目标、教学内容，突出本单元的重点内容、核心思想与研究方法[3]。

在核心素养引领下，数学教学设计要注重从“以知识为本”逐步转向“以人为本”。培育核心素养，要注重教学情境的创设，突出问题，为学生营造良好的学习氛围，推动主动分析和解决问题，激发求异与探索精神，激励合作互动探索，激发其潜在的思维意识，拓展数学视野，形成数学意识；培育核心素养，发展数学理性思维是关键，数学理性思维不只是静态的数学基础知识与技能，还是一种提出问题、分析问题、解决问题、评价问题的思维模式，数学课堂应是学生锤炼理性思维的重要阵地[4]。

2　单元教学内容分析

2.1　数学背景分析

函数是现代数学最基本的概念，是贯穿高中数学课程的主线，是高考的核心考查内容，在高考数学试卷中常以压轴题出现。近年来，高考通常围绕着“极值点”的解法和证明来命题，难度较大，往往以学生熟悉的数学图形、基本函数模型为载体，考查学生的直观想象、逻辑推理、数学建模等能力。

2.2　极值点偏移内容分析

处理极值点偏移问题常用以下三种策略：

(1)对称函数法：根据题意，合理构造辅助函数 $f(x)=f(x_0+x)-f(x_0-x)$ 并对其求导数，从而确定 $f(x)$ 的单调性，再通过 $f(x)$ 的单调性得出 $\frac{x_1+x_2}{2}$

与 x_0 的大小；

(2)对数平均值不等式法：合理构造对数平均值 $\frac{x_1-x_2}{\ln x_1-\ln x_2}$，利用对数平均值不等式 $\frac{x_1-x_2}{\ln x_1-\ln x_2}>\sqrt{x_1x_2}$ 或 $\frac{x_1-x_2}{\ln x_1-\ln x_2}<\frac{x_1+x_2}{2}$ 处理即可。

(3)差值（或比值）代换法：以上两种方法偏向于技巧解题，也可以将极值点代入求解 $f(x_1)$，$f(x_2)$，并根据题意合理转化，利用差值（或比值）设参构造新函数，再利用导数求解新函数的单调性来解决极值点偏移问题。

3 单元教学目标分析

通过确定函数单调性，学生进一步掌握求导法则，掌握求单调性与极值的基本技能。通过构造法的学习，逐步提高学生分析难题、解决难题的能力。通过不同偏移问题的相互转化，使学生体会数学中的转化与化归、函数与方程思想等[5]。进一步明确构造法在解决函数问题中的重要性，使学生感受数学的构造之美，培养其数学运算、直观想象、逻辑推理等核心素养。

4 课时教学设计

整体教学观指导下的单元教学，教师可以对知识结构、思想方法、核心素养等要素进行综合考量，自上而下地规划教学，完成从“课时设计”向“单元设计”、从“分散目标”向“递进目标”、从“零散问题”向“系列问题”的转变。对于本单元内容，安排三个课时教学：第一课时，极值点偏移定义和对称函数法解决极值点偏移问题；第二课时，通过典型问题，利用对数平均值不等式法解答极值点偏移问题；第三课时，利用差值（或比值）代换法构造新函数，再利用导数求解新函数的单调性进而解决极值点偏移问题。下面为第一课时的教学设计。

4.1 教学分析

教学主题：极值点偏移定义和对称函数法解决极值点偏移问题。

教学目标：(1)能清楚分辨什么情况下极值点会偏离，什么情况下极值点不会偏移；(2)清晰掌握极值点偏移的处理方法。

教学重点：根据极值点合理构造对称函数。

教学难点：极值点偏移问题中新函数的构造。

教学方法：这节课是采用“四导学教课堂”[6]开展教学，以“导问、导学、导练、导智”和“自主学、合作学、教他人”的学习方式，以教师为主导、学生为主体作为教学指导思想，以合作学习作为主要教学组织形式，着力提高学生课堂教学的参与度、问题探讨的深广度，从而提高教学的有效性和质量。具体为：教师为主导——提出问题，引导学生思考，分析题意，示范引领；学生为主体——学生独立思考，互相学习，互相交流、讨论，小组活动，逐步深入。

4.2 教学过程设计

教师：上节课我们布置了课后作业——作出函数 $f(x)=xe^{-x}$ 的图像，写出其单调区间和极值点。大家观察，该图像呈现的是先增后减的趋势，单调递增区间为 $(-\infty,1)$，单调递减区间为 $(1,+\infty)$，极值点：$x=1$。下面我们进行两个探究活动。

第一个活动：直线 $y=m$ 与函数 $f(x)=xe^{-x}$ 交于 A，B 两点，请探究零点 x_1，x_2 与极值点的不等关系。我们在函数 $f(x)=xe^{-x}$ 的图像上画一条直线 $y=m$ 与其交于 A，B 两点，$A(x_1,f(x_1))$，$B(x_2,f(x_2))$，现在请小组讨论 x_1，x_2 与极值点 1 的关系。

教师：哪个学习小组可以回答？（学生举手）请第一小组代表来回答发现了怎样的不等关系。

学生 1：我发现了 $0<x_1<1<x_2$（教师板书）。

教师：很好，那么你能发现 x_1，x_2 的和与 1 之间有什么关系吗？

学生 1：x_1+x_2 大于极值点的 2 倍。

教师：你是如何得到的？

学生 1：将 $y=m$ 往上平移趋于 1 时，x_1，x_2 都趋于 1，$y=m$ 往下平移趋于 0 时，x_2 趋于正无穷，这时 x_1 与 x_2 之和远远大于 2，通过分析极端情形作出判断。

教师：非常好，第一小组由图形直观得到猜想 $x_1+x_2>2$。

第二个活动：思考并小组讨论，直线 $y=m$ 与函数 $f(x)=xe^{-x}$ 的图像交于 A，B 两点，请作出 x_1 关于 $x=1$ 的对称点 x_3，并比较 $f(x_1)$，$f(x_2)$，$f(x_3)$ 的大小。

教师：请第二小组的代表来回答。

学生 2：经过小组讨论，得到 $f(x_3)>f(x_2)=f(x_1)$。

教师：那 x_3 与 x_1 在数量上有什么关系？

学生 2：显然 $x_3=2-x_1$。

教师：很棒！第二小组从图形又直观得出猜想 $f(2-x_1)>f(x_2)=f(x_1)$。

这是刚才通过学生的回答画出的大致图像。从而得到的两个猜想。现在我们用信息技术的手段来验证一下（GGB 画板演示），直线 $y=m$ 与 $f(x)=xe^{-x}$ 的图像交于 A,B 两点，无论怎样拖动这条直线，始终有 AB 中点的横坐标 $\frac{x_1+x_2}{2}>1$，验证了 $x_1+x_2>2$；且 x_1 关于直线 $x=1$ 对称的点 x_3，其函数值 $f(x_3)$ 也始终有 $f(x_3)>f(x_2)$，也验证了 $f(x_3)>f(x_2)$。

下面我们继续探究这两个猜想之间的关系，第一个关系是 $x_1+x_2>2$，第二个关系是 $f(2-x_1)>f(x_2)=f(x_1)$，两者在结构上对我们有什么启示？

教师：我们请第三小组的代表来回答。

学生 3：将第一个不等式中的 x_1 移到式子右边，得到 $2-x_1<x_2$，这样与 $f(2-x_1)>f(x_2)$ 的结构看起来很相似。

教师：很好，这两个关系式的结构很相似，可是通过观察，我们发现两个不等式的符号方向是相反的，原因是什么？

学生 3：因为这个函数在 $x=1$ 的右侧是单调递减的。

教师：很好。通过刚才我们的探究活动，结合这两个猜想以及它们内部的联系，给了我们一些启示。

例 1　已知函数 $f(x)=xe^{-x}(x\in\mathbf{R})$，如果 $x_1\neq x_2$，且 $f(x_1)=f(x_2)$。证明：$x_1+x_2>2$。

学生 4：要证明 $x_1+x_2>2$，先把 x_1 移到右边。

教师：你是从哪里得到这种想法的？

学生 4：由函数的单调性得到的。然后证明 $f(x_2)<f(2-x_1)$。

教师：为什么是小于号？怎样证明此不等式？

学生 4：由上面分析知道，函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 的右侧是单调递减。然后移项、做差，使差小于 0，可以通过构造一个函数实现。

教师：把 $f(x_2)-f(2-x_1)<0$ 的左边看成一个新的函数。那么，构造一个新的函数，自变量应该为单变量，但这里有两个变量 x_1,x_2，可以将双变量转化成单变量吗？

学生 4：可以的，因为 $f(x_1)=f(x_2)$（教师板书）。

教师：将 $f(x_1)=f(x_2)$ 代入，即等价证明 $f(x_1)-f(2-x_1)<0$。将 x_1 看成是自变量 x，那么此时 $f(x)$ 的定义域是什么？显然构造的函数 $F(x)=f(x)-f(2-x)$ 的自变量范围应该借助 x_1 的范围，即 $x\in(0,1)$。欲证明 $F(x)<0,x\in(0,1)$ 成立，那么应当如何证明？

学生 5：对 $F(x)$ 求导，利用单调性证明 $F(x)<0$ 恒成立。

教师：很好，即证明函数 $F(x)$ 的最大值小于 0。下面我们一起来演算。将 $F(x)=f(x)-f(2-x)$ 代入解析式，有 $F(x)=xe^{-x}-(2-x)e^{x-2}$，求导得 $f'(x)=(1-x)\frac{e^2-e^{2x}}{e^{x+2}}$（教师板书），我们看导函数在区间 $(0,1)$ 内是大于 0 还是小于 0？

学生 6：大于 0。分子、分母都大于 0，所以说明函数 $F(x)$ 在区间 $(0,1)$ 内单调递增，所以 $F(x)<F(1)=0$。接下来用综合法将分析的过程写出即可。因为 $F(x)=f(x)-f(2-x)<0$，又因为 $0<x_1<1$，所以 $f(x_1)<f(2-x_1)$。又因为 $f(x_1)=f(x_2)$，所以 $f(x_2)<f(2-x_1)$。此时 $x_2,2-x_1$ 在同一个单调区间 $(1,+\infty)$ 内。因为 $x_2,2-x_1>1$，所以函数 $f(x)$ 单调递减，所以 $x_2>2-x_1,x_1+x_2>2$。

教师：当然，解决这个问题，我们先求函数 $f(x)$ 的单调性和极值。因为 $f(x)=xe^{-x}$，令 $f'(x)=0$，则 $x=1$。当 $0<x<1$ 时，$f'(x)>0$；当 $x>1$ 时，$f'(x)<0$。所以 $f(x)$ 是先增后减，极值点为 1。大家思考，要证 $x_1+x_2>2$，如果把 2 除过去，变成 $\frac{x_1+x_2}{2}>1$，$\frac{x_1+x_2}{2}$ 恰好是 x_1,x_2 对应点连线的中点的横坐标，1 是函数 $f(x)$ 的极值点，这种 x_1,x_2 对应点连线的中点横坐标与极值点的不等关系问题就是我们今天研究的极值点偏移问题。

现在先介绍它的概念：极值点偏移问题是指对于单极值函数，由于函数极值点左右的增减速度不同，使得函数图像没有对称性，设函数在 $x=x_0$ 处取得极值，一条平行于 x 轴的直线与函数交于 A,B 两点，则线段 AB 中点的横坐标与极值点不相等。这样的问题称为极值点偏移问题。

教师：刚才这道题，A,B 两点中点的横坐标大于极值点，所以极值点是左偏了。极值点偏移问题在近几年的高考题中经常出现，例 1 就是 2020 年高考数学天津卷的最后一问，像这类问题，我们可以用构造对称函数的策略去解决。

练习：已知函数 $f(x)=e^x-ax-1$（a 为常数），曲线 $y=f(x)$ 在与 y 轴的交点 A 处的切线斜率为 -1。

（Ⅰ）求 a 的值及函数 $y=f(x)$ 单调区间和极值点。

（Ⅱ）若 $x_1<\ln 2, x_2>\ln 2$，且 $f(x_1)=f(x_2)$，试证明：$x_1+x_2<2\ln 2$。

教师：我们请一名同学上来解答。

学生7在黑板上作答如下。

（Ⅰ）解：因为 $f'(x)=e^x-a$，又 $f'(0)=1-a=-1$，所以 $a=2$。

所以 $f(x)=e^x-2x-1, f'(x)=e^x-2$。

令 $f'(x)>0$，得 $f(x)$ 在区间 $(\ln 2,+\infty)$ 内递增；

令 $f'(x)<0$，得 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,\ln 2)$ 内递减。

所以 $f(x)$ 有最小值为 $x=\ln 2$，无极大值。

（Ⅱ）证明：设 $F(x)=f(x)-f(2\ln 2-x)(x<\ln 2)=e^x-2x-1-[e^{2\ln 2-x}-2(2\ln 2-x)-1]=e^x-e^{2\ln 2-x}-2x+2(2\ln 2-x)$，所以 $F'(x)=e^x+e^{2\ln 2-x}-4=e^x+\frac{4}{e^x}-4$。

所以 $F'(x)\geqslant 2\sqrt{e^x\cdot\frac{4}{e^x}}-4=0$。

则 $F(x)$ 在区间 $(-\infty,\ln 2)$ 内递增，$F(x)<F(\ln 2)=0$，即 $f(x)<f(2\ln 2-x)=0$。

所以 $f(x_2)=f(x_1)<f(2\ln 2-x_1)$。

又 $x_2>\ln 2, 2\ln 2-x_1>\ln 2$ 且 $f(x)$ 在区间 $(\ln 2,+\infty)$ 内递增，所以 $x_2<2\ln 2-x_1, x_1+x_2<2\ln 2$。

教师：很好！但要注意，通过基本不等式有 $e^x+\frac{4}{e^x}-4\geqslant 0$，能不能取得等号，什么时候取得等号？

学生8：当 $x=\ln 2$ 时取等号。但是这道题取不到，所以函数 $F(x)$ 在区间 $(-\infty,\ln 2)$ 内递增。

教师：解决极值点偏移问题的策略是什么？

学生9：首先要对函数求导，求出极值点和单调性。其次根据 $f(x)$ 的极值点去构造函数 $F(x)$，然后对新函数求导，得到它的单调性，判断函数值与0的关系，最后利用函数的单调性得到所证明的结论。

教师：用构造函数的方法来解决极值点偏移问题的基本策略，即先关注极值点，构造新的函数，化双变量为单变量，将 x_1, x_2 转化为只含 x_1 或 x_2 的一个新函数，再利用它的单调性判断函数值与0的关系，最后转化为原来函数单调性的问题。对此，笔者编了一个口诀：极值偏离对称轴，构造对称函数；四个步骤要足够，两次单调明先后。

课后作业：已知 $f(x)=x\ln x-\frac{1}{2}mx^2-x, x\in\mathbf{R}$。

（Ⅰ）当 $m=-2$ 时，求函数 $f(x)$ 的所有零点；

（Ⅱ）若 $f(x)$ 有两个极值点 x_1, x_2，且 $x_1<x_2$，求证：$x_1x_2>e^2$（e为自然对数的底数）。

5 教学反思

本节课合理布局学习的目标，即选择极值点偏移问题，根据其特点进行教学前端分析，采取"由易到难、层层展析"的学习方式引导学生走向深度学习。深度学习是核心素养落地的重要途径，它与核心素养是相互加强的互动循环关系。在备课中以单元教学设计为背景，通过对同一素材"极值点偏移问题"的持续关注、深入挖掘和多维解析，可以有效呈现鞭辟入里、直抵内核的深度学习样态。

本节课对于只有一个极值点的可导函数，什么情况下出现极值点左偏移，什么情况下出现极值点右偏移？需要建立基本模型来帮助学生快速做出判断。什么情况下两式相减能奏效，两式相减的思想基础是什么？其他题是否也可以效仿两式相减的思路？根据教学反思中的问题，笔者还需要不断优化教学，从而为学生设计出更加完善的教学方案。

高考数学函数综合题往往具有较强的综合性，其特点为难度大、灵活多变，许多学生在短时间内是很难快速找到思路，这就要求教师在日常教学中做好充足的准备，教学不是以大量刷题为目的，而是注意挖掘典型问题的数学本质，充分展示解题的思维过程，从解题的思维过程中建立一套适合学生的数学模型，从而脱离题海战术，真正实现学有所得[7]。

参考文献：

[1] 喻平.核心素养指向的数学教学目标设计[J].数学通报，2021，60(11)：1-5，13.

[2] 钟启泉.学会"单元设计"[N].中国教育报，2015-06-12(9).

[3] 吕世虎，杨婷，吴振英.数学单元教学设计的内涵、特征以及基本操作步骤[J].当代教育与文化，2016(4)：41-46.

[4] 刘晓东.高中数学核心素养背景下的"知识应用课"教学设计[J].数学通讯(下半月)，2020(4)：23-25，52.

[5] 周文叶.中小学表现性评价的理论和技术[M].上海：华东师范大学出版社，2016.

[6] 吴宝.核心素养下中学数学"四导学教"教学模式的实践研究[J].理科爱好者，2020(16)：71-72.

[7] 张静.构造函数证明一类不等式——极值点偏移的解题策略[J].中学数学，2017(8)：90-91.